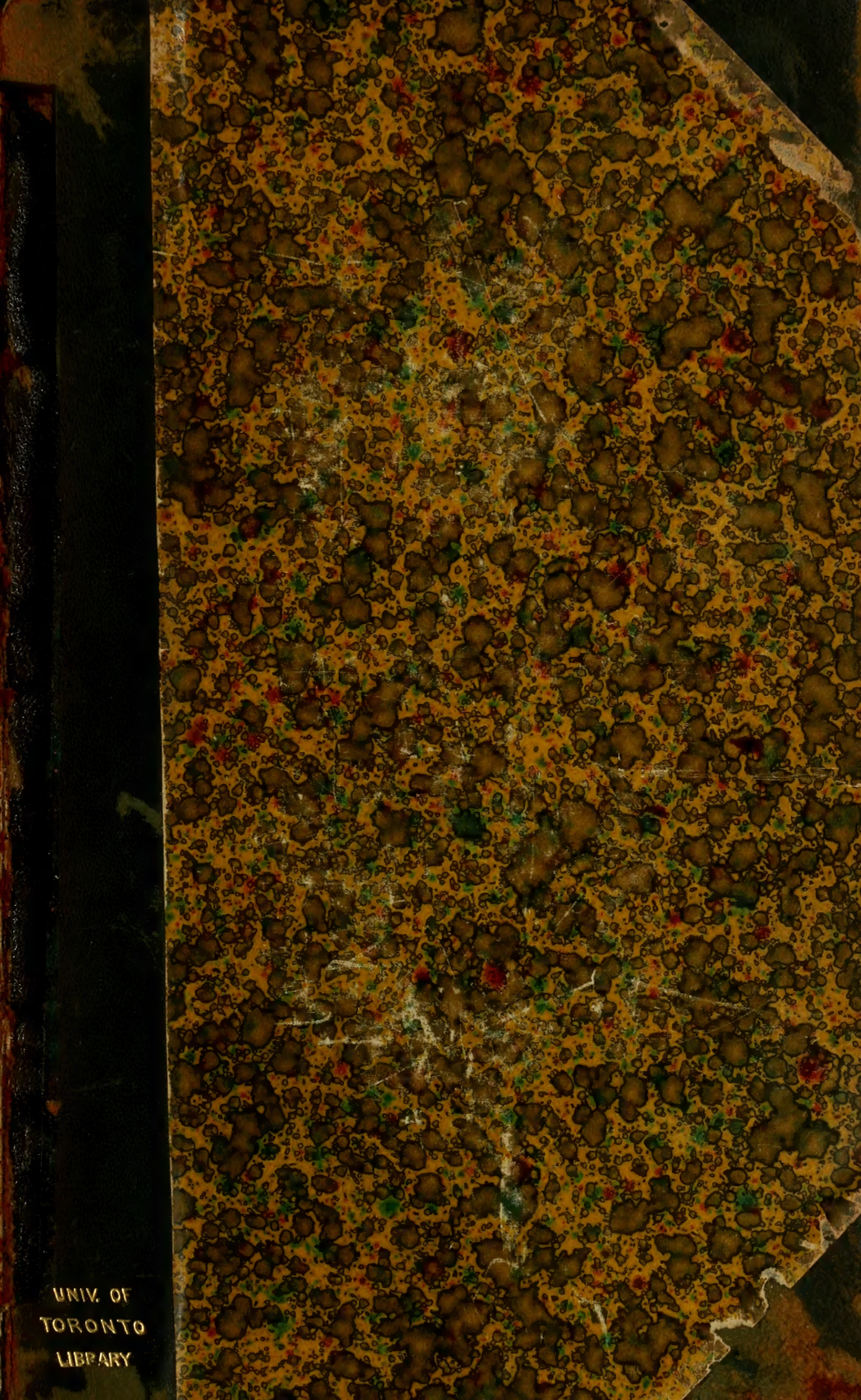

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1899


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

42-90

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. C.-A. LAISANT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. X. ANTOMARI,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CARNOT.

**Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Gerono, Prouhet, Bourget, et Brisse et M. Rouché.**

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DIX-HUITIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R1c]

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE CINÉMATIQUE;

Par M. H. DUPORT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Les propositions que j'ai en vue sont les suivantes :

I. Le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure sur une courbe fixe.

II. Le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par le roulement d'un cône lié au corps sur un cône fixe de même sommet.

III. Le mouvement général d'un corps solide peut être produit en faisant mouvoir une surface réglée liée au corps, de façon qu'elle touche constamment une surface réglée fixe le long d'une génératrice.

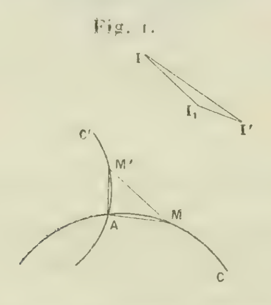
Malgré l'importance de ces théorèmes, les démonstrations qui en sont données laissent beaucoup à désirer. Géométriquement on les déduit presque sans transition des théorèmes correspondants sur le déplacement discontinu. Analytiquement les démonstrations sont simples

et bien connues, mais elles laissent de côté la discussion qui accompagne le troisième cas, ainsi que les propositions et les formules concernant les mouvements que l'on obtient quand on part des courbes, des cônes ou des surfaces qui figurent dans les énoncés.

La présente Note a pour objet de combler cette lacune (¹) :

I. Soit d'abord une figure plane en mouvement. Figurons la courbe C lieu des centres instantanés de rotation dans le plan, et dans la position qu'elle occupe à l'époque t, la courbe C′ lieu des points de la figure

Fig. 1.



mobile qui coïncident à chaque instant avec le centre instantané de rotation au même instant. Ces deux courbes ont en commun le centre instantané de rotation A à l'époque t. Soit M le point de la courbe C qui sera centre instantané de rotation à l'époque $t+h$, M′ le point de la courbe mobile qui viendra à cette époque coïncider avec le point M. On peut amener la courbe C′ dans la position qu'elle occupera à l'époque $t+h$ par une translation telle que tous ses points décrivent des

(¹) La méthode analytique consiste dans l'emploi d'un trièdre mobile. C'est de ce procédé que M. Antomari s'est servi dans son excellente thèse pour retrouver les propriétés déjà connues des surfaces réglées et en découvrir de nouvelles.

droites égales et parallèles à $M'M$, puis par une rotation autour de M, de l'angle φ dont la figure plane a tourné pendant le temps h.

Soit I un point quelconque de la figure. Il vient d'abord de I en I_1, de façon que le segment II_1 soit égal et parallèle à $M'M$, puis de I_1 en I' par une rotation autour de M de l'angle φ. Joignons I_1I' et II'. On a

$$\frac{(II')}{h} = \frac{(II_1)}{h} + \frac{(I_1I')}{h}.$$

Faisons tendre h vers zéro. $\frac{(II')}{h}$ a pour limite la vitesse du point I à l'époque t, c'est-à-dire un segment perpendiculaire à AI et égal à ωAI, ω étant la limite de $\frac{\varphi}{h}$. $\frac{(I_1I')}{h}$ a même limite que $\frac{(II')}{h}$ puisque les points I_1 et I' ont pour limite I, et puisque le point M a pour limite A. On voit donc que le segment $\frac{(II_1)}{h}$ et, par suite, le segment $\frac{(M'M)}{h}$ doivent avoir pour limite zéro.

Or on a

$$\frac{(M'M)}{h} = \frac{(AM)}{h} - \frac{(AM')}{h}.$$

$\frac{(AM)}{h}$ a pour limite la vitesse d'un mobile qui parcourrait la courbe C, de façon à se trouver à chaque instant au centre instantané de rotation. $\frac{(AM')}{h}$ a pour limite la vitesse, dans la figure mobile supposée fixe à l'époque t, d'un mobile qui parcourrait la courbe C' de façon à se trouver à chaque instant au point qui coïncidera à cet instant avec le centre instantané de rotation. Ces deux vitesses devant être les mêmes, d'abord les courbes C et C' devront être tangentes en A; ensuite, si l'on désigne par s et s' les arcs comptés sur C et C' à

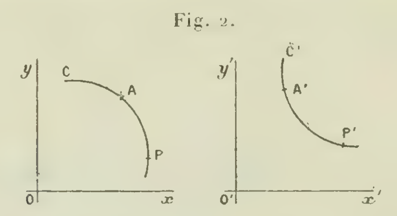
partir de deux origines O et O′ et terminés en M et M′, on devra avoir

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{ds'}{dt}.$$

Si l'on compte les arcs s et s' dans les sens où les mobiles se déplacent sur les courbes C et C′ pendant le mouvement, on devra prendre le signe + dans le second membre de l'équation précédente, et si les points O et O′ doivent venir coïncider à une certaine époque, on aura $s = s'$, et la courbe mobile roulera effectivement sur la courbe fixe.

En modifiant légèrement la démonstration précédente, on voit aisément que, si une courbe C′ roule sur une courbe C, le point de contact est à chaque instant le centre instantané de rotation dans le mouvement d'une figure plane liée à C′. Proposons-nous maintenant de trouver les formules qui représentent le mouvement obtenu en faisant rouler une courbe sur une autre. Soient C

Fig. 2.



la courbe fixe rapportée à deux axes Ox, Oy; a et b les coordonnées d'un point A en fonction de l'arc compté sur la courbe dans un sens déterminé à partir d'une origine P. Soit C′ la courbe mobile; $O'x'$, $O'y'$ des axes liés à cette courbe, a' et b' les coordonnées d'un point en fonction de l'arc s' compté à partir d'une origine fixe P′ dans un sens déterminé.

Supposons maintenant que la courbe C′ soit placée de façon à rouler sur la courbe C, et admettons que les

points A, A′ doivent coïncider à une certaine époque et qu'il en soit de même pour P et P′. Supposons enfin, que les arcs s et s' soient comptés dans les sens PA, P′A′ ou dans les sens opposés. Avec ces hypothèses, s et s' sont la même fonction du temps t achevant de définir le roulement.

Considérons en A deux axes de coordonnées, l'un la tangente Ax_1 à la courbe dans le sens des arcs croissants, l'autre la normale Ay_1 faisant avec cette tangente l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des axes. Soient $A'x'_1$, $A'y'_1$ les axes analogues pour la seconde courbe. Les axes Oxy, $O'x'y'$ ayant même sens par hypothèse, quand C′ est placée sur C, de façon que A′ coïncide avec A et que les deux courbes soient tangentes, les axes Ax_1y_1, $A'x'_1y'_1$ coïncident.

On a pour passer de Oxy à Ax_1y_1 les formules

$$x = a + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$
$$y = b + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi,$$

φ désignant l'angle de la tangente Ax_1 avec Ox. On a

$$\cos\varphi = \frac{da}{ds}, \qquad \sin\varphi = \frac{db}{ds}.$$

On a de même pour passer de $O'x'y'$ à $A'x'_1y'_1$ les formules

$$x' = a' + x'_1 \cos\varphi' - y'_1 \sin\varphi',$$
$$y' = b' + x'_1 \sin\varphi' + y'_1 \cos\varphi',$$

φ' désignant l'angle de $A'x'_1$ avec $O'x'$. On a

$$\cos\varphi' = \frac{da'}{ds'}, \qquad \sin\varphi' = \frac{db'}{ds'}.$$

Si nous écrivons que l'on a $x_1 = x'_1$, $y_1 = y'_1$, nous aurons écrit que les deux courbes roulent l'une sur l'autre et l'on aura donc pour les formules de transfor-

mation permettant de passer des axes fixes aux axes liés à la figure mobile

$$(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi=\quad(x'-a')\cos\varphi'+(y'-b')\sin\varphi'.$$
$$-(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi=-(x'-a')\sin\varphi'+(y'-b')\cos\varphi'.$$

On les résout aisément par rapport à x et y et l'on peut en déduire l'expression connue de la vitesse de rotation de la figure mobile.

II. Soit maintenant un corps solide mobile autour d'un point fixe O. Considérons le cône, lieu des axes instantanés de rotation dans l'espace, et dans la position qu'il occupe à l'époque t, le cône lieu des droites du corps qui coïncident à chaque instant avec l'axe instantané de rotation à cet instant.

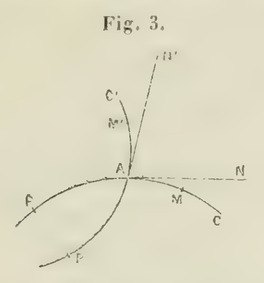
Limitons les deux cônes d'un même côté du sommet et considérons sur les deux demi-cônes ainsi obtenus les courbes d'intersection avec la sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre le point fixe. Soient C et C′ ces courbes.

A l'époque t, les deux cônes ont en commun l'axe instantané de rotation à cette époque. Les deux courbes ont donc en commun un point A. Je dis qu'elles sont tangentes en ce point et que de plus, si l'on considère les arcs comptés sur les deux courbes à partir de deux points P et P′ qui sont l'un, le pôle instantané de rotation à une époque t_0, l'autre le point de la courbe C′ qui coïncide avec P à l'époque t_0, les arcs PA, P′A sont égaux.

Pour le démontrer, nous supposerons la première courbe parcourue par un mobile qui se trouve à chaque instant au pôle instantané de rotation à cet instant, la seconde par un mobile qui se trouve à chaque instant au point de cette courbe qui coïnciderait à cet instant avec le pôle instantané de rotation.

Soient M et M′ les positions des deux mobiles à l'époque $t+h$; pour amener le corps de la position qu'il occupe à l'époque t à celle qu'il occupe à l'époque

Fig. 3.



$t+h$, on peut d'abord amener OM′ sur OM par une rotation de l'angle M′OM autour d'un axe perpendiculaire en O au plan M′OM, puis imprimer au corps une rotation convenable autour de OM. Supposons que l'on fasse tendre h vers zéro et voyons quelle sera la vitesse d'un point quelconque I. Dans le premier mouvement le point I vient en I_1, dans le second en I′; on a

$$\frac{(II')}{h} = \frac{(II_1)}{h} + \frac{(I_1 I')}{h}.$$

$\frac{(II')}{h}$ a pour limite la vitesse du point I. $\frac{(II_1)}{h}$ a pour limite la vitesse du point I dans un mouvement de rotation autour de la position limite de la perpendiculaire au plan M′OM avec une vitesse angulaire égale à la limite de l'expression $\frac{\text{angle M}'\text{OM}}{h}$. Cherchons la limite du segment $\frac{(MM')}{h}$; sa grandeur limite est la vitesse angulaire cherchée, et sa direction nous donnera la position limite du plan M′OM. On a

$$\frac{(MM')}{h} = \frac{(AM')}{h} - \frac{(AM)}{h} = (v) - (v').$$

(v) et (v') étant les vitesses à l'époque t des mobiles considérés précédemment. Si donc on représente par AN et AN′ ces vitesses, on voit que le rapport $\frac{(\mathrm{MM}')}{h}$ a pour limite (NN′). Le plan M′OM aura pour limite le plan mené par OA parallèlement à NN′. D'autre part, $\frac{(\mathrm{I_1 I'})}{h}$ a pour limite la vitesse de I dans un certain mouvement de rotation autour de OA, puisque les points $\mathrm{I_1}$ et I′ ont pour limite I et que le point M a pour limite A. Comme, en définitive, la vitesse de I doit être la même que dans un mouvement de rotation autour de OA et qu'elle s'obtient en composant une vitesse de rotation autour d'un axe perpendiculaire à OA et une vitesse de rotation autour de OA, il faut que la première disparaisse. Il faut donc que le segment NN′ soit nul, c'est-à-dire que les points N et N′ coïncident. On voit donc que les courbes C et C′ seront tangentes en A et que l'on aura $v = v'$, c'est-à-dire

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt},$$

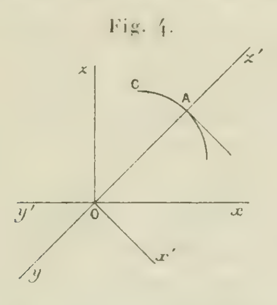
s et s' désignant les arcs PA, P′A, et, comme on a à la fois $s = s' = 0$, on en déduit $s = s'$. Le théorème est donc démontré. De très légères modifications à cette démonstration permettent de faire voir, que quand un cône roule sur un cône fixe de même sommet, l'arête de contact est à chaque instant l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps lié au cône mobile.

Proposons-nous maintenant de trouver les formules qui permettent d'étudier le mouvement obtenu en faisant rouler un cône sur un cône fixe de même sommet.

Soient Ox, Oy, Oz des axes rectangulaires fixes ayant pour origine le sommet commun des deux cônes. Soit A un point de la courbe C. Considérons un système d'axes

formé de la droite OA pour axe des z', de la parallèle menée par O à la tangente à la courbe dans le sens

Fig. 4.



positif pour axe des x', enfin de la perpendiculaire Oy' au plan $Ox'z'$ telle que les deux trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$ aient même sens. Soient

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

les formules de transformation permettant de passer de l'un de ces systèmes à l'autre.

Le point A ayant pour coordonnées a, b, c, fonctions de l'arc s définissant le cône, on a

$$\alpha'' = a, \qquad \alpha = \frac{da}{ds}, \qquad \alpha' = b\frac{dc}{ds} - c\frac{db}{ds},$$
$$\beta'' = b, \qquad \beta = \frac{db}{ds}, \qquad \beta' = c\frac{da}{ds} - a\frac{dc}{ds},$$
$$\gamma'' = c, \qquad \gamma = \frac{dc}{ds}, \qquad \gamma' = a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds}.$$

Soient ξ, η, ζ les angles de la normale principale en A avec les axes et ρ le rayon de courbure, on a

$$\frac{d^2a}{ds^2} = \frac{\cos\xi}{\rho}, \qquad \frac{d^2b}{ds^2} = \frac{\cos\eta}{\rho}, \qquad \frac{d^2c}{ds^2} = \frac{\cos\zeta}{\rho}.$$

Soit φ le rayon de courbure sphérique, inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en

valeur absolue, positif si le centre de courbure sphérique est du côté de Oy' par rapport à Oz', négatif dans le cas contraire.

Dans le premier cas, on a les relations

$$\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta = \cos\varphi, \qquad \rho = \sin\varphi,$$
$$\alpha'' \cos\xi + \beta'' \cos\eta + \gamma'' \cos\zeta = -\sin\varphi,$$

et dans le second

$$\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta = -\cos\varphi, \qquad \rho = -\sin\varphi,$$
$$\alpha'' \cos\xi + \beta'' \cos\eta + \gamma'' \cos\zeta = \sin\varphi.$$

On aura donc dans tous les cas les relations

$$\alpha' \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta' \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma' \frac{\cos\zeta}{\rho} = \cot\varphi,$$
$$\alpha'' \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta'' \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma'' \frac{\cos\zeta}{\rho} = -1;$$

on a également

$$\alpha \frac{\cos\xi}{\rho} + \beta \frac{\cos\eta}{\rho} + \gamma \frac{\cos\zeta}{\rho} = 0.$$

On a donc

$$\alpha \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma \frac{d^2 c}{ds^2} = 0,$$
$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \cot\varphi,$$
$$\alpha'' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta'' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma'' \frac{d^2 c}{ds^2} = -1.$$

On en tire

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = \alpha' \cot\varphi - \alpha'', \quad \frac{d^2 b}{ds^2} = \beta' \cot\varphi - \beta'', \quad \frac{d^2 c}{ds^2} = \gamma' \cot\varphi - \gamma''.$$

Considérons maintenant s comme une fonction du temps t et posons

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

on aura finalement les formules

$$\frac{d\alpha}{dt} = v(\alpha' \cot\varphi - \alpha''), \qquad \frac{d\alpha'}{dt} = -v\alpha\cot\varphi, \qquad \frac{d\alpha''}{dt} = v\alpha,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = v(\beta' \cot\varphi - \beta''), \qquad \frac{d\beta'}{dt} = -v\beta\cot\varphi, \qquad \frac{d\beta''}{dt} = v\beta,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = v(\gamma' \cot\varphi - \gamma''), \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = -v\gamma\cot\varphi, \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = v\gamma.$$

Faisons pour le cône mobile supposé rapporté à des axes liés à lui ce que nous avons fait pour le cône fixe, en affectant toutes les quantités de l'indice 1. Supposons que les arcs soient comptés sur les deux courbes C et C' dans des sens tels que les arcs comptés dans le même sens soient destinés à rouler l'un sur l'autre. On aura les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés au cône mobile

$$x' = x'_1, \qquad y' = y'_1, \qquad z' = z'_1,$$

ou bien

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \alpha'_1 x_1 + \beta'_1 y_1 + \gamma'_1 z_1,$$
$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \alpha''_1 x_1 + \beta''_1 y_1 + \gamma''_1 z_1.$$

Remarquons enfin que l'on aura $v = v_1$, puisque les deux courbes roulent l'une sur l'autre. Si l'on dérive les formules précédentes par rapport au temps, en y regardant x_1, y_1, z_1 comme des constantes, on obtient aisément la formule connue de la vitesse de rotation du corps lié au cône mobile, soit $\omega = v(\cot\varphi - \cot\varphi_1)$.

III. Je rappellerai d'abord quelques propriétés fondamentales des surfaces réglées proprement dites.

Soit L une génératrice quelconque. Quand l'on s'éloigne de plus en plus sur la génératrice, le plan tangent est à la limite parallèle à la génératrice infiniment voisine de L. C'est-à-dire que si, par un point,

on mène des parallèles aux génératrices de la surface, le plan tangent à l'infini sur une génératrice est parallèle au plan tangent au cône le long de la génératrice correspondante.

Il y a un point A sur la génératrice L pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini sur la génératrice. Ce point est unique, il s'appelle le *point central*. Enfin, si l'on désigne par x la distance d'un point M de la génératrice au point A, distance comptée positivement dans un sens, négativement dans l'autre, par φ l'angle du plan tangent en ce point avec le plan tangent au point central, on a la relation

$$x \cot \varphi = \pi,$$

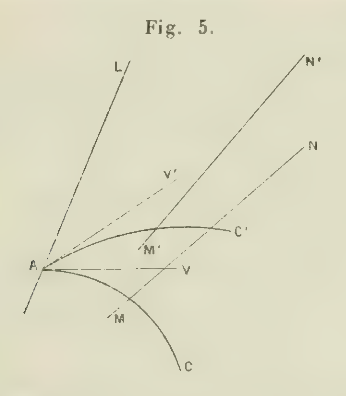
π étant une constante. Elle est positive si, quand on se déplace sur la génératrice dans le sens positif, le plan tangent tourne dans le sens adopté, négative dans le sens contraire. π est en valeur absolue la limite du rapport de la plus courte distance de deux génératrices voisines à leur angle.

On appelle *ligne de striction* le lieu des points centraux sur les génératrices. Soit C cette courbe et s l'arc compté dans un sens à partir d'une origine fixe. Soit aussi le cône formé par les parallèles menées par un point fixe aux directions positives des génératrices et soit la courbe d'intersection de ce cône avec la sphère de rayon égal à l'unité. Soit σ l'arc compté sur cette courbe dans le sens correspondant à celui compté sur la ligne de striction. Soit enfin i l'angle de la tangente dans le sens des arcs croissants à la ligne de striction avec la direction positive sur la génératrice. On a en grandeur

$$\pi = \frac{ds \sin i}{d\sigma}.$$

Soit maintenant un corps solide en mouvement dans le cas général. Considérons la surface lieu des axes instantanés de torsion dans l'espace et dans la position qu'elle occupe à l'époque t, la surface lieu des droites du corps qui coïncident à chaque instant avec l'axe instantané de torsion à cet instant. Ces deux surfaces ont en commun l'axe instantané de torsion AL à l'époque t. Appelons *points correspondants* sur ces deux surfaces deux points qui coïncident à une certaine époque. Soit C une courbe quelconque tracée sur la première surface.

Fig. 5.



Considérons cette courbe comme parcourue par un mobile M qui se trouve à chaque instant sur l'axe instantané de torsion à cet instant. Soit M′ le point correspondant de M.

Ce point M′ décrira sur la seconde surface une courbe C′ et ces deux courbes auront en commun un point A de la génératrice AL. Nous supposerons que l'on compte sur ces courbes les arcs s et s' à partir de points correspondants et dans les sens où les points M et M′ les parcourent par suite du mouvement. Les vitesses v et v' de ces mobiles seront alors positives. Supposons maintenant que les positions M et M′ des mobiles correspondent

à l'époque $t+h$ et soient MN, M'N' les génératrices des deux surfaces passant par M et M'.

Pour amener la surface liée au corps dans la position qu'elle occupe à l'époque $t+h$, on peut d'abord lui faire subir une translation, de façon que tous ses points décrivent des droites égales et parallèles à M'M; puis lui imprimer un mouvement de rotation autour d'une droite passant par M, perpendiculaire à la fois à MN et à M'N', l'angle décrit étant celui de M'N' et de MN; enfin terminer par une rotation d'un angle convenable autour de MN.

Si l'on fait tendre h vers zéro, on voit que la vitesse d'un point quelconque du corps est la somme des trois quantités suivantes : 1° un segment égal à la limite de $\frac{(M'M)}{h}$. Or on a

$$\frac{(M'M)}{h} = \frac{(AM)}{h} - \frac{(AM')}{h};$$

c'est donc le segment V'V joignant les extrémités des vitesses des deux mobiles en A; 2° la vitesse du point dans un mouvement de rotation autour d'un axe passant par A et perpendiculaire à AL; 3° la vitesse du point dans un mouvement de rotation autour de AL. On en déduit que la vitesse du mouvement de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL doit être nulle et que la vitesse $v'v$ doit être parallèle à AL. Considérons d'abord la seconde condition. Elle fait voir que les plans tangents en A aux deux surfaces coïncident et, comme le point A est un point quelconque de la génératrice, on voit que les deux surfaces réglées auront même plan tangent tout le long de cette génératrice. Il en résulte d'abord que si l'une des surfaces est réglée proprement dite, l'autre le sera aussi et que, si l'une est développable, l'autre le sera aussi.

Considérons d'abord le cas où les deux surfaces sont réglées proprement dites. Nous affecterons de l'indice prime les quantités relatives à la seconde.

Sur les génératrices destinées à coïncider, les points centraux sont des points correspondants et les paramètres sont égaux et de même signe. Faisons coïncider les lignes de striction avec les courbes C et C'; la condition que VV' doit être parallèle à AL donne

$$v \sin i = v' \sin i',$$

ou bien

$$ds \sin i = ds' \sin i'.$$

Je dis que la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL est alors nulle ; cette vitesse est la limite du rapport de l'angle de MN et de M'N' à l'intervalle de temps h. Or ces deux génératrices sont à la limite dans le plan commun perpendiculaire au plan central passant par AL et, comme les paramètres sont de même signe, MN et M'N' viennent dans le même demi-plan. Les paramètres étant égaux, on a

$$\frac{ds \sin i}{d\sigma} = \frac{ds' \sin i'}{d\sigma'}.$$

Les numérateurs étant égaux, on aura

$$d\sigma = d\sigma'.$$

Or l'angle de MN et de M'N' est en valeur absolue l'infiniment petit $d\sigma - d\sigma'$, ce qui démontre la proposition.

Ainsi donc, pour que deux surfaces puissent être l'une, le lieu des axes de torsion dans l'espace, l'autre le lieu des axes de torsion dans le corps, il faut et il suffit que si l'on considère les lignes de striction et que l'on désigne par s et s' les arcs correspondant à des génératrices de même paramètre, on ait

$$ds \sin i = ds' \sin i'.$$

Les deux surfaces ne sont donc pas arbitraires.

Dans le cas particulier où, pour l'une des surfaces, le paramètre est le même pour toutes les génératrices, comme cela a lieu pour les hyperboloïdes de révolution à une nappe, il faudra qu'il en soit de même pour l'autre surface et alors la relation précédente détermine les génératrices qui doivent s'appliquer les unes sur les autres.

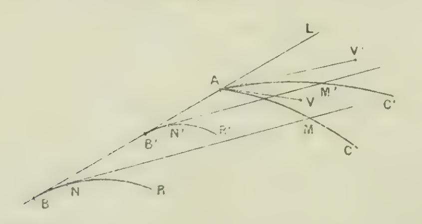
Si nous revenons au cas général, on voit que la vitesse de translation du corps est

$$v \cos i - v' \cos i'.$$

Supposons maintenant que les deux surfaces soient développables et qu'aucune d'elles ne soit un cylindre ou un cône.

Reprenons la *fig.* 5 sur laquelle nous avons représenté en plus les arêtes de rebroussement R et R' des deux surfaces et les points de contact B et B' de ces

Fig. 6.



arêtes de rebroussement avec la génératrice commune AL. Supposons que les points N et N' soient les points de contact des génératrices MN, M'N' avec leurs arêtes de rebroussement. Considérons deux nouveaux mobiles parcourant les courbes R et R' de façon à se trouver constamment le premier en N, le second en N'.

Désignons à l'époque t les vitesses de ces mobiles par v et v'. Considérons les longueurs NM, N'M' comme des

fonctions du temps et soient l et l' leurs valeurs BA, B'A à l'époque t. Les quantités v, v', l, l' seront comptées positivement dans la direction AL. Dès lors, la vitesse du point M est, à l'époque t, quand ce point est en A, la résultante de $v + \frac{dl}{dt}$ portée sur la direction AL et de $\frac{lv}{\rho}$ portée sur la normale principale à la courbe R en B, ρ étant le rayon de courbure de cette courbe en B. De même, la vitesse du point M' à l'époque t, quand ce point est en A, est la résultante de $v' + \frac{dl'}{dt}$ portée sur la direction AL et de $\frac{l'v'}{\rho'}$ portée sur la normale principale à la courbe R' en B', ρ' étant le rayon de courbure de cette courbe en B'. Les deux composantes suivant les normales principales sont situées perpendiculairement à AL dans le plan osculateur commun aux deux courbes R et R'; la droite V'V devant être parallèle à AL, on devra avoir

$$\frac{lv}{\rho} = \pm \frac{l'v'}{\rho'}.$$

On doit prendre le signe + si les normales principales sont de même sens, le signe — si elles sont de sens contraire. Comme on peut augmenter l et l' d'une quantité arbitraire, puisque le point A est quelconque sur la génératrice AL, on en déduit que l'on aura séparément

$$l = l', \qquad \frac{v}{\rho} = \pm \frac{v'}{\rho'}.$$

Les deux arêtes de rebroussement sont donc à chaque instant tangentes au même point de la génératrice commune et la relation

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'}$$

détermine les points successifs de tangence ; les arcs s et s' sont alors comptés de façon à aller tous deux en croissant ou en décroissant dans le mouvement.

Je dis qu'alors la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire à AL est nulle. En effet, les deux droites NM, N′M′ sont à la limite dans le plan osculateur commun aux deux courbes. Les angles infiniment petits que les génératrices NM, N′M′ font avec AL sont alors les angles de contingence $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds'}{\rho'}$, et sont égaux. L'angle infiniment petit de NM et de N′M′ est donc nul.

La vitesse de translation du corps à l'époque t est $v - v'$.

Considérons maintenant le cas où l'une des surfaces, la surface mobile par exemple, est un cône. Il n'y aura rien de changé dans la méthode précédente. Seulement la courbe R′ n'existe plus, le point N′ coïncide toujours avec B′, et $\frac{v'}{\rho'}$ doit être remplacé par $\frac{d\alpha'}{dt}$, α' étant l'arc compté sur la courbe d'intersection du cône avec la sphère de rayon égal à l'unité. On voit alors que le sommet du cône doit être constamment sur l'arête de rebroussement de la surface développable et la relation

$$\frac{ds}{\rho} = d\alpha'$$

détermine les génératrices correspondantes sur le cône et sur la surface développable proprement dite. La vitesse de translation du corps est $\frac{ds}{dt}$.

Si la surface fixe était un cône, la surface mobile développable proprement dite, il faudrait que son arête de rebroussement passât constamment par le sommet du cône et l'on aurait la relation

$$d\alpha = \frac{ds'}{\rho'}$$

pour déterminer les génératrices correspondantes sur les deux surfaces. La vitesse de translation du corps est alors $-\frac{ds'}{dt}\cdot$

Si les deux surfaces sont des cônes, on voit qu'ils doivent avoir même sommet et l'on retombe dans le paragraphe II.

Enfin, si l'une des surfaces est un cylindre, on voit, puisque l'angle infiniment petit de NM et de N'M' doit être nul, que la seconde surface est aussi un cylindre. La question est alors la même que celle qui a fait l'objet du paragraphe I, avec cette légère modification que l'on a à y considérer en plus un déplacement parallèlement aux génératrices des cylindres.

Le mouvement du cylindre mobile se composera donc d'un roulement sur le cylindre fixe et d'un glissement parallèlement aux génératrices.

Nous allons maintenant étudier analytiquement le mouvement produit en faisant mouvoir une surface réglée de façon qu'elle touche constamment le long d'une génératrice une surface réglée fixe.

Supposons d'abord que les deux surfaces soient réglées proprement dites. Soient l'une des surfaces, C une courbe tracée sur cette surface; a, b, c les coordonnées d'un point A en fonction de l'arc s; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs d'une demi-droite AL passant par A et coïncidant avec la génératrice, exprimés également en fonction de l'arc s.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'écrire

$$x = a + \lambda\alpha'', \qquad y = b + \lambda\beta'', \qquad z = c + \lambda\gamma'',$$

λ étant une arbitraire qui représente la distance d'un point de la génératrice au point A, distance comptée

positivement sur AL, négativement en sens contraire. L'équation du plan tangent en ce point est

$$\begin{vmatrix} X-a & \frac{da}{ds} & \alpha'' \\ Y-b & \frac{db}{ds} & \beta'' \\ Z-c & \frac{dc}{ds} & \gamma'' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} X-a & \frac{d\alpha''}{ds} & \alpha'' \\ Y-b & \frac{d\beta''}{ds} & \beta'' \\ Z-c & \frac{d\gamma''}{ds} & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

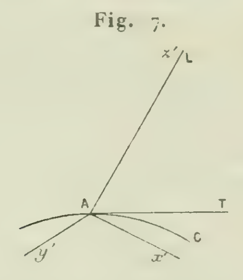
Pour que la courbe C soit la ligne de striction, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{da}{ds}\frac{d\alpha''}{ds} + \frac{db}{ds}\frac{d\beta''}{ds} + \frac{dc}{ds}\frac{d\gamma''}{ds} = 0.$$

Nous supposerons désormais cette condition remplie.

Prenons de nouveaux axes liés au mouvement de la génératrice; AL pour axe des z'; soit AT la tangente à

Fig. 7.



la ligne de striction dans le sens des arcs croissants; prenons Ax' dans le plan de AT et de Az' et du même côté de Az' que AT; enfin Ay' sera perpendiculaire au plan $Ax'z'$ de façon que le trièdre $Ax'y'z'$ ait même sens que le trièdre des axes fixes.

Soient

$$x = a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = b + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = c + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'$$

les formules de transformation. Nous avons déjà désigné par i l'angle de Az' et de AT. On a les relations

$$\alpha \frac{da}{ds} + \beta \frac{db}{ds} + \gamma \frac{dc}{ds} = \sin i,$$

$$\alpha' \frac{da}{ds} + \beta' \frac{db}{ds} + \gamma' \frac{dc}{ds} = 0,$$

$$\alpha'' \frac{da}{ds} + \beta'' \frac{db}{ds} + \gamma'' \frac{dc}{ds} = \cos i.$$

On en tire

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{ds} = \alpha \sin i + \alpha'' \cos i, \\[2ex] \dfrac{db}{ds} = \beta \sin i + \beta'' \cos i, \\[2ex] \dfrac{dc}{ds} = \gamma \sin i + \gamma'' \cos i. \end{cases}$$

L'équation du plan tangent en un point de la génératrice devient

$$\lambda x' \left(\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} \right) - y' \sin i = 0.$$

Cette équation donne la valeur en grandeur et en signe du paramètre π, soit

$$\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\sin i}{\pi}.$$

En tenant compte de (1) et de (2), on a les équations

$$\alpha \frac{d\alpha''}{ds} + \beta \frac{d\beta''}{ds} + \gamma \frac{d\gamma''}{ds} = 0,$$

$$\alpha' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\sin i}{\pi},$$

$$\alpha'' \frac{d\alpha''}{ds} + \beta'' \frac{d\beta''}{ds} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{ds} = 0.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \alpha' \frac{\sin i}{\pi}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \beta' \frac{\sin i}{\pi}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \gamma' \frac{\sin i}{\pi}.$$

Cherchons enfin la quantité

$$\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds}.$$

. Pour cela, remarquons que l'on a

$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\alpha' \cos\xi + \beta' \cos\eta + \gamma' \cos\zeta}{\rho},$$

ξ, η, ζ étant les angles de la normale principale à la courbe C avec les axes fixes, ρ le rayon de courbure de cette courbe; d'après le théorème de Meunier, le second membre est égal à $\frac{1}{R_1}$, R_1 étant le rayon de courbure de la section normale à la surface réglée passant par AT, ce rayon de courbure étant positif ou négatif, selon que le centre de courbure est sur Oy' ou dans la direction opposée. Posons

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin^2 i}{R}.$$

On aura

$$\alpha' \frac{d^2 a}{ds^2} + \beta' \frac{d^2 b}{ds^2} + \gamma' \frac{d^2 c}{ds^2} = \frac{\sin^2 i}{R}.$$

On en tire

$$\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi}.$$

On aura alors les relations

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0,$$

$$\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + \beta' \frac{d\beta}{ds} + \gamma' \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi},$$

$$\alpha'' \frac{d\alpha}{ds} + \beta'' \frac{d\beta}{ds} + \gamma'' \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

On en tire

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \alpha'\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right), \\ \dfrac{d\beta}{ds} = \beta'\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right), \\ \dfrac{d\gamma}{ds} = \gamma'\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right), \end{cases}$$

On trouvera de même

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{ds} = -\alpha\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right) - \alpha''\dfrac{\sin i}{\pi}, \\ \dfrac{d\beta'}{ds} = -\beta\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right) - \beta''\dfrac{\sin i}{\pi}, \\ \dfrac{d\gamma'}{ds} = -\gamma\left(\dfrac{\sin i}{R} - \dfrac{\cos i}{\pi}\right) - \gamma''\dfrac{\sin i}{\pi}. \end{cases}$$

Ces formules établies, supposons que les notations précédentes se rapportent à la surface fixe et désignons celles relatives à la surface mobile par les mêmes lettres affectées de l'indice 1. Remarquons que l'on peut choisir la direction $A_1 z'_1$ et le sens dans lequel on compte l'arc s_1 de la courbe C_1 de façon que dans le mouvement les axes $A x' y' z'$ coïncident avec $A_1 x'_1 y'_1 z'_1$ et que π_1 soit égal à π en grandeur et en signe. On aura alors les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés à la surface mobile

$$\begin{aligned} x' = x'_1 &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) \\ &= \alpha_1(x_1-a_1) + \beta_1(y_1-b_1) + \gamma_1(z_1-c_1). \\ y' = y'_1 &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c) \\ &= \alpha'_1(x_1-a_1) + \beta'_1(y_1-b_1) + \gamma'_1(z_1-c_1), \\ z' = z'_1 &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c) \\ &= \alpha''_1(x_1-a_1) + \beta''_1(y_1-b_1) + \gamma''_1(z_1-c_1). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1.$$

on trouve, en dérivant par rapport au temps les équations précédentes et désignant par $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ les projections de la vitesse d'un point de la surface mobile sur les axes Ax', Ay', Az', les formules suivantes

$$V_{x'} = -v \sin i + v y' \left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi} \right)$$
$$= - v_1 \sin i_1 + v_1 y' \left(\frac{\sin i_1}{R_1} - \frac{\cos i_1}{\pi} \right),$$
$$V_{y'} = - \frac{v \sin i}{\pi} z' - v x' \left(\frac{\sin i}{R} - \frac{\cos i}{\pi} \right)$$
$$= - \frac{v_1 \sin i_1}{\pi} z' - v_1 x' \left(\frac{\sin i_1}{R_1} - \frac{\cos i_1}{\pi} \right),$$
$$V_{z'} = - v \cos i + \frac{v \sin i}{\pi} y' = - v_1 \cos i_1 + v_1 \frac{\sin i_1}{\pi} y'.$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$v \sin i = v_1 \sin i_1.$$

Considérons maintenant le cas où les deux surfaces sont développables, mais où aucune d'elles n'est ni un cylindre, ni un cône. Soit C l'arête de rebroussement de la surface fixe. Prenons la tangente en un point A dans le sens des arcs croissants pour axe des z', la normale principale pour axe des x' et la perpendiculaire au plan osculateur dans un sens tel que le trièdre $Ax'y'z'$ ait même sens que celui des axes fixes pour axe des y'.

Soient

$$x = a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = b + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = c + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

les formules de transformation de coordonnées. On aura, en désignant par ρ le rayon de courbure, par τ le rayon

de torsion affecté de signe, les formules suivantes

$$\alpha'' = \frac{da}{ds}, \qquad \beta'' = \frac{db}{ds}, \qquad \gamma'' = \frac{dc}{ds},$$

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma}{\rho},$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \frac{\alpha}{\tau}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = \frac{\beta}{\tau}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{\gamma}{\tau},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\alpha'}{\tau} - \frac{\alpha''}{\rho}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\beta'}{\tau} - \frac{\beta''}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\gamma'}{\tau} - \frac{\gamma''}{\rho}.$$

Désignons maintenant les notations relatives à la surface mobile par les mêmes lettres affectées de l'indice 1. Il faut placer la surface mobile sur la surface fixe de façon à faire coïncider les axes des z' et des z'_1 et les plans $Ax'z'$ et $A_1x'_1z'_1$. Nous pouvons supposer que l'on fasse coïncider la direction positive de Az' avec la direction positive de $A_1z'_1$.

On aura alors les formules suivantes pour passer des axes fixes aux axes liés à la surface mobile

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) \\ &= \pm[\alpha_1(x_1-a_1) + \beta_1(y_1-b_1) + \gamma_1(z_1-c_1)], \\ y' &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c) \\ &= \pm[\alpha'_1(x_1-a_1) + \beta'_1(y_1-b_1) + \gamma'_1(z_1-c_1)], \\ z' &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c) \\ &= l + [\alpha''_1(x_1-a_1) + \beta''_1(y_1-b_1) + \gamma''_1(z_1-c_1)], \end{aligned}$$

l désignant la distance AA_1, les signes $+$ devant être pris si les normales principales sont du même côté de la génératrice, les signes $-$ devant être pris dans le cas contraire.

On en tire, en posant

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1,$$

et dérivant par rapport au temps les expressions des

projections $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ de la vitesse d'un point sur les axes Ax', Ay', Az'. Ce sont

$$V_{x'} = \frac{v}{\tau} y' + \frac{v}{\rho} z' - \frac{v_1}{\tau_1} y' \mp \frac{v_1}{\rho_1} (z' - l),$$

$$V_{y'} = -\frac{v}{\tau} x' + \frac{v_1}{\tau_1} x',$$

$$V_{z'} = v - \frac{v x'}{\rho} - \frac{dl}{dt} - v_1 \pm \frac{v_1}{\rho_1} x'.$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$l = 0, \qquad \frac{v}{\rho} = \pm \frac{v_1}{\rho_1}.$$

Considérons enfin le cas où l'une des deux surfaces développables est un cône. Nous venons de donner les formules relatives à la surface développable; nous avons donné dans le paragraphe II les formules relatives au cône. Il nous suffira de les réunir.

Les notations relatives au cône seront affectées de l'indice 1. Quand le cône est placé sur la surface développable, on peut toujours supposer que les parties positives des axes Az' et $O_1 z'_1$ coïncident, et que Ax' est parallèle à $O_1 x'_1$ et de même sens.

On a alors pour passer des axes liés à la surface développable à ceux liés au cône les formules

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ y' &= \alpha'(x-a) + \beta'(y-b) + \gamma'(z-c) = \alpha'_1 x_1 + \beta'_1 y_1 + \gamma'_1 z_1, \\ z' &= \alpha''(x-a) + \beta''(y-b) + \gamma''(z-c) = l + \alpha''_1 x_1 + \beta''_1 y_1 + \gamma''_1 z_1, \end{aligned}$$

l désignant la distance AO_1.

Si maintenant nous supposons la surface développable fixe, il nous faut regarder x_1, y_1, z_1 comme des constantes en dérivant par rapport au temps et x, y, z comme variables. Si, au contraire, nous supposons le

cône fixe, il nous faut regarder x, y, z comme des constantes et x_1, y_1, z_1 comme variables. Les formules obtenues ne différeront qu'en ce que les projections $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ sur Ax', Ay', Az' d'un point de la figure mobile seront dans le second cas dans les seconds membres des formules suivantes

$$V_{x'} - \frac{v y'}{\tau} - \frac{v z'}{\rho} = v_1 \cot\varphi_1 y' - v_1(z' - l),$$

$$V_{y'} + \frac{v x'}{\tau} = -\cot\varphi_1 v_1 x',$$

$$V_{z'} - v + \frac{v x'}{\rho} = \frac{dl}{dt} + v_1 x',$$

où l'on a

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{ds_1}{dt} = v_1.$$

Pour que l'on ait un mouvement de torsion autour de l'axe des z', il faut et il suffit que l'on ait

$$l = 0, \qquad \frac{v}{\rho} = v_1.$$

Les formules relatives au mouvement d'un cylindre touchant à chaque instant un cylindre fixe le long d'une génératrice se déduisent trop simplement du paragraphe I pour qu'il y ait lieu d'insister.

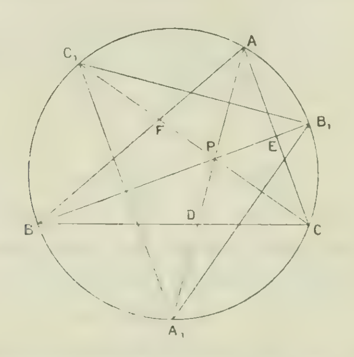
[K1c]

FORMULES POUR L'ÉTUDE D'UNE FIGURE REMARQUABLE;

Par M. Giacomo CANDIDO, à Pise.

Le but de cet article est d'indiquer quelques formules qui peuvent servir pour l'étude d'une figure remarquable. On trouvera même quelques applications.

M. le Professeur F. Ferrari (*Periodico di Matematica,* vol. VIII, p. 67) en généralisant quelques formules de M. le Professeur Thiry résout le problème suivant : *Calculer les distances des points du plan aux sommets d'un triangle et les distances mutuelles de ces points, connaissant les rapports que déterminent sur les côtés du triangle les droites joignant ces points aux sommets.* Soit ABC le triangle, P le point intérieur ou



extérieur au triangle et AD, BE, CF les droites qui le projettent par A, B, C sur BC, AC, AB. Faisons

$$\frac{AF}{FB} = m, \qquad \frac{BD}{DC} = p, \qquad \frac{CF}{FA} = q \qquad (mpq = 1),$$

et en prenant m, p, q positifs ou négatifs selon que D, E, F tombent sur les côtés ou sur leur prolongement, on a

$$(I)\quad \begin{cases} \overline{CP}^2 = [(1+m)(a^2m+b^2)-mc^2] : (mp+p+1)^2, \\ \overline{AP}^2 = [(1+p)\quad(pb^2+c^2)-pa^2] : (pq+p+1)^2, \\ \overline{BP}^2 = [(1+q)\quad(qc^2+a^2)-qb^2] : (mq+q+1)^2. \end{cases}$$

Supposons maintenant que AD, BE, CF coupent le cercle circonscrit au triangle en A_1, B_1, C_1 respective-

ment, on a ainsi un autre triangle $A_1B_1C_1$. Alors on a

$$\frac{AF + FB}{FB} = m + 1, \qquad \frac{AF + FB}{AF} = \frac{1 + m}{m},$$

d'où

$$\frac{c^2}{\overline{AF}.\overline{FB}} = \frac{(m+1)^2}{m},$$

ou

$$\overline{AF}.\overline{FB} = \frac{mc^2}{(m+1)^2};$$

d'ailleurs

$$\overline{C_1F}.\overline{FC} = \frac{mc^2}{(m+1)^2},$$

d'où

$$FC_1 = \frac{mc^2}{\overline{FC}.(m+1)^2}.$$

Maintenant des formules (I) on tire

$$\text{(II)} \qquad \overline{FC}^2 = \frac{(m+1)(ma^2+b^2) - mc^2}{(1+m)^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$FC_1 = \frac{mc^2}{(1+m)\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2}},$$

donc

$$CC_1 = \frac{(m+1)(ma^2+b^2)}{(1+m)\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2}},$$

ou

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} CC_1 &= \frac{a^2m+b^2}{\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2}}, \\ AA_1 &= \frac{c^2p+b^2}{\sqrt{(1+p)(pc^2+b^2) - pa^2}}, \\ BB_1 &= \frac{a^2q+c^2}{\sqrt{(1+q)(a^2q+c^2) - b^2q}}. \end{aligned} \right.$$

Par les triangles semblables ABD, CDA_1, BDA_1,

ADC, ..., on tire les autres formules :

$$(\text{IV})\quad \left\{\begin{aligned}
A_1C &= \frac{ac}{\sqrt{(1+p)(c^2p+b^2)-pa^2}},\\
A_1B &= \frac{apb}{\sqrt{(1+p)(c^2p+b^2)-pa^2}},\\
B_1A &= \frac{ab}{\sqrt{(1+q)(a^2q+c^2)-b^2q}},\\
B_1C &= \frac{bcq}{\sqrt{(1+q)(a^2q+c^2)-b^2q}},\\
C_1B &= \frac{cb}{\sqrt{(1+m)(ma^2+b^2)-mc^2}},\\
C_1A &= \frac{acm}{\sqrt{(1+m)(ma^2+b^2)-mc^2}},
\end{aligned}\right.$$

et à ces formules nous pouvons en joindre d'autres relatives aux angles que les droites AD, BE, CF font avec les côtés du triangle ABC.

Posons

$$\widehat{BAA_1} = \theta, \qquad \widehat{C_1CA} = \xi, \qquad \widehat{B_1BC} = \varphi,$$

alors on a facilement

$$p = \frac{c\sin\theta}{b\sin(A-\theta)}, \qquad m = \frac{b\sin\xi}{a\sin(C-\xi)},$$

$$q = \frac{a\sin\varphi}{c\sin(B-\varphi)},$$

d'où

$$\tang\theta = \frac{bp\sin A}{c+bp\cos A}, \qquad \tang\xi = \frac{am\sin\xi}{b+am\cos\xi},$$

$$\tang\varphi = \frac{cq\sin\varphi}{a+cq\cos\varphi},$$

et de ces formules on tire les suivantes :

$$\sin\theta = \frac{bp\sin A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\cos\theta = \frac{c+bp\cos A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\sin(A-\theta) = \frac{c \sin A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\cos(A-\theta) = \frac{bp + c\cos A}{\sqrt{b^2p^2+c^2+2bcp\cos A}},$$

$$\sin\varphi = \frac{cq\sin B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\cos\varphi = \frac{a + cq\cos B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\sin(B-\varphi) = \frac{a\sin B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\cos(B-\varphi) = \frac{cq + a\cos B}{\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos B}},$$

$$\sin\xi = \frac{am\sin C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\cos\xi = \frac{b + am\cos C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\sin(C-\xi) = \frac{b\sin C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}},$$

$$\cos(C-\xi) = \frac{am + b\cos C}{\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos C}}.$$

Première application. — *Surface du triangle* $A_1B_1C_1$: Les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont respectivement

$$A_1 = B - \varphi + \xi, \qquad B_1 = C - \xi + \theta, \qquad C_1 = A - \theta + \varphi;$$

il en résulte

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B-\varphi)\cos\xi + \sin\xi\cos(B-\varphi)\\ &= \frac{a\sin B(b+am\cos C) + am\cos C(cq + a\cos B)}{\sqrt{(a^2m^2+b^2+2abm\cos C)(c^2q^2+a^2+2acq\cos B)}},\end{aligned}$$

et en répétant la même chose pour $\sin B_1$ et $\sin C_1$,

on a

$$\sin A_1 = \frac{a(am \sin A + b \sin B + cmq \sin C)}{\sqrt{(a^2 m^2 + b^2 + 2abm \cos C)(c^2 q^2 + a^2 + 2acq \cos B)}},$$

$$\sin B_1 = \frac{b(amp \sin A + bp \sin B + c \sin C)}{\sqrt{(a^2 m^2 + b^2 + 2abm \cos C)(b^2 p^2 + c^2 + 2bcp \cos A)}},$$

$$\sin C_1 = \frac{c(a \sin A + bpq \sin B + cq \sin C)}{\sqrt{(c^2 q^2 + a^2 + 2acq \cos B)(b^2 p^2 + c^2 + 2bcp \cos A)}}.$$

De ces formules, comme on voit facilement, on tire la formule qui donne la surface du triangle $A_1 B_1 C_1$, et en appelant S_1 la surface de ce triangle, et S celle du triangle ABC, on a

$$S_1 = \frac{(ma^2 + mqc^2 + b^2)(mpa^2 + b^2 p + c^2)(a^2 + pqb^2 + qc^2) S}{(a^2m^2 + b^2 + 2abm \cos C)(c^2 q^2 + a^2 + 2acq \cos B)(b^2 p^2 + c^2 + 2bcp \cos A)}.$$

Pour la surface de l'hexagone $AC_1 BA_1 CB_1$ on a la formule

$$E = 8R^2 S \left[\frac{p + (b^2 p^2 + c^2) \operatorname{cotg} A}{b^2 p^2 + c^2 + 2bcp \cos A} + \frac{q + (c^2 q^2 + a^2) \operatorname{cotg} B}{c^2 q^2 + a^2 + 2acq \cos B} + \frac{m + (a^2 m^2 + b^2) \operatorname{cotg} C}{a^2 m^2 + b^2 + 2abm \cos C} \right].$$

Si le point P *est le centre de gravité du triangle* ABC *on a la formule*

$$S_1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3 S}{(a^2 + 4bc \cos A)(b^2 + 4ac \cos B)(c^2 + 4ab \cos C)};$$

si ce point est le point de Lemoine du triangle ABC, *on a*

$$S_1 = \frac{27 a^2 b^2 c^2 S}{(a^2 + 4bc \cos A)(b^2 + 4ac \cos B)(c^2 + 4ab \cos C)}.$$

Deuxième application. — *Le quadrilatère harmonique :* Supposons que le point P soit le point de Lemoine

du triangle, alors on a

$$m = \frac{b^2}{a^2}, \qquad p = \frac{c^2}{b^2}, \qquad q = \frac{a^2}{c^2}.$$

Par les formules (IV) on a

$$\overline{A_1C}.\overline{AB} = \overline{A_1B}.CA,$$
$$C_1B.\overline{CA} = \overline{AC_1}.\overline{BC},$$
$$\overline{B_1A}.\overline{BC} = \overline{B_1C}.\overline{AB},$$

d'où nous concluons : *Les quadrilatères* AC_1BC, ABA_1C, $ABCB_1$ *sont harmoniques.*

Considérons en particulier le quadrilatère ABA_1C; on obtient par nos formules

$$\frac{\overline{A_1B}^2}{\overline{A_1C}^2} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A_1C}^2} = \frac{AD}{DA_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BA_1}^2},$$

d'où nous concluons que : *Le point de concours* D *des diagonales est le point de Lemoine du quadrilatère.*

La même considération pour les points E *et* F *relativement aux quadrilatères.*

Corollaire. — ***Les tangentes menées par les extrémités d'une diagonale, dans un quadrilatère harmonique, se coupent sur l'autre diagonale.***

Considérons le quadrilatère $B_1C_1A_1C$; par nos formules on a

$$\overline{B_1C_1}.\overline{A_1C_1} = \overline{CB_1}.\overline{A_1C_1},$$

donc : *Le quadrilatère* $B_1C_1A_1C$ *est harmonique.*

Il en est de même des quadrilatères $C_1A_1B_1A$, $A_1B_1C_1B$.

Corollaire. — *Les deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *sont cosymédians.*

Questions. — On voit facilement comment par le moyen des formules indiquées on peut aborder l'étude d'une foule de problèmes relatifs aux différentes relations métriques entre les éléments de la figure que nous avons étudiée, et comment la combinaison même de ces formules peut donner quelques propriétés spéciales de figures particulières (en prenant pour m, p, q des valeurs particulières).

Par exemple étudier quand on a

$$\frac{A_1C}{AB} = \frac{B_1A}{BC} = \frac{C_1B}{CA},$$

$$A_1A = AB + A_1C, \ \ldots,$$

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{A_1D} \,.\, \overline{A_1C},$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BP}{BE} = \frac{CP}{CF} = k,$$

$$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1,$$

$$PD = PE = PF = \ldots (^1).$$

Si le point P *est le centre de gravité du triangle* ABC, *on a*

$$\left(\frac{b^2+c^2}{AA_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+c^2}{BB_1}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{CC_1}\right)^2 = 3(a^2+b^2+c^2).$$

[L²6a]

SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A UN TÉTRAÈDRE;

Par M. Ch. BIOCHE.

On sait que le triangle formé par trois points d'une conique et le triangle formé par les tangentes en ces

---

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. IV, p. 97 (1044).

points sont homologiques. Il est naturel de se demander si le tétraèdre formé par quatre points d'une quadrique non développable et le tétraèdre formé par les plans tangents sont homologiques. Je vais montrer que cela n'a pas toujours lieu, mais que sur une quadrique donnée, non développable, on peut toujours trouver des systèmes de quatre points présentant cette particularité.

1. Si le tétraèdre de référence a pour faces

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 = 0, \qquad X_4 = 0,$$

l'équation d'une quadrique circonscrite peut s'écrire

$$\Sigma A_{hk} X_h X_k = 0,$$

h et k prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, mais ne prenant pas tous deux à la fois la même valeur; en outre, je supposerai

$$A_{h,k} = A_{k,h}.$$

Les plans tangents aux différents sommets ont pour équations

$$A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + A_{3,4}X_4 = 0,$$
$$A_{2,1}X_1 + A_{2,3}X_3 + A_{2,4}X_4 = 0,$$
$$A_{3,1}X_1 + A_{3,2}X_2 + A_{3,4}X_4 = 0,$$
$$A_{4,1}X_1 + A_{4,2}X_2 + A_{4,3}X_3 = 0.$$

Pour que le tétraèdre formé par ces plans soit homologique du tétraèdre de référence, il faut et il suffit que les traces des plans tangents sur les faces du tétraèdre de référence soient dans un même plan; en particulier, il faut que les plans tangents aux sommets d'une arète coupent l'arète opposée au même point. Or l'arète

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0$$

coupe les plans tangents correspondants aux points

$$X_1 = X_2 = 0, \qquad A_{1,3}X_3 + A_{1,4}X_4 = 0,$$
$$X_1 = X_2 = 0. \qquad A_{2,3}X_3 + A_{2,4}X_4 = 0.$$

La condition pour que ces points soient confondus est que

$$A_{1,3}A_{2,4} = A_{2,3}A_{1,4}.$$

Si l'on opère de même pour l'arête,

$$X_1 = 0, \qquad X_3 = 0,$$

on trouve

$$A_{2,3}A_{1,4} = A_{1,2}A_{3,4}.$$

2. Les conditions trouvées sont suffisantes, car si l'on pose

$$A_{2,3} = \alpha, \qquad A_{3,1} = \beta, \qquad A_{1,2} = \gamma,$$
$$A_{1,4} = \frac{\beta\gamma}{\delta}, \qquad A_{2,4} = \frac{\gamma\alpha}{\delta}, \qquad A_{3,4} = \frac{\alpha\beta}{\delta},$$

l'équation de la surface peut s'écrire

$$\frac{X_1X_2}{\alpha\beta} + \frac{X_1X_3}{\alpha\gamma} + \frac{X_1X_4}{\alpha\delta} + \frac{X_2X_3}{\beta\gamma} + \frac{X_2X_4}{\beta\delta} + \frac{X_3X_4}{\gamma\delta} = 0,$$

et les traces des plans tangents sont dans le plan

$$(H) \qquad \frac{X_1}{\alpha} + \frac{X_2}{\beta} + \frac{X_3}{\gamma} + \frac{X_4}{\delta} = 0.$$

Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre de référence aux sommets du tétraèdre circonscrit se coupent au point

$$(h) \qquad \frac{X_1}{\alpha} = \frac{X_2}{\beta} = \frac{X_3}{\gamma} = \frac{X_4}{\delta}.$$

On voit qu'étant donné un tétraèdre, on peut toujours prendre arbitrairement soit le plan d'homologie H, soit le pôle d'homologie h; on a une quadrique circonscrite

au tétraèdre de référence et inscrite dans un autre, homologique de celui-ci.

3. Si l'on se donne une quadrique non développable Q, on peut trouver sur cette surface des systèmes de quatre points tels que le tétraèdre formé par un de ces systèmes soit homologique du tétraèdre formé par les plans tangents en ces points.

Soient A, B, C trois points pris arbitrairement sur Q (mais non en ligne droite), le plan ABC coupe Q suivant une conique, et les tangentes en A, B, C à cette conique coupent les côtés opposés en trois points situés sur une même droite Δ. Si l'on mène par Δ un plan tangent à Q, soit D le point de contact, le tétraèdre ABCD réalise la condition énoncée, car chaque côté du triangle ABC coupe les plans tangents aux sommets de l'arête opposée au même point, et l'on a vu que ces conditions étaient suffisantes.

On aurait pu se donner le plan d'homologie ; alors on pouvait prendre un des sommets arbitrairement : les autres sont alors sur une conique déterminée, sur laquelle on peut choisir l'un de ces points à volonté, car, si le plan d'homologie est à l'infini, la quadrique Q étant une sphère, le problème revient à trouver quatre points de la sphère formant un tétraèdre régulier.

4. Si l'on considère une quadrique quelconque circonscrite au tétraèdre de référence, les quatre traces des plans tangents aux sommets sur les faces du tétraèdre de référence sont sur une quadrique dont l'équation peut s'écrire

$$A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}X_1^2 + A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,4} + A_{1,4}A_{2,3})X_1X_2 + \ldots,$$

les termes non écrits se déduisant de ceux qui sont écrits

par des permutations d'indices. Cette quadrique se réduit à deux plans confondus dans le cas particulier précédemment étudié.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Besançon.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définition de la fonction* Γ. *Démontrer que* $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}$.

PROBLÈME. — *Étant donnés trois axes rectangulaires et un hélicoïde représenté par l'équation*

$$z = \mathrm{K} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

où K *est une constante donnée, calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des* xy *suivant un secteur circulaire ayant son centre au point* O, *ayant pour rayon* a *et pour angle au centre* α.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer avec cinq décimales l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mathrm{K}^2x^2)}}, \qquad \mathrm{K} = 0,43528.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Une barre homogène pesante est abandonnée à elle-même et assujettie à passer par un point fixe O sur lequel elle glisse sans frottement.*

Déterminer son mouvement.

Épreuve pratique. — *Tracé d'une came soulevant un marteau.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Forme de la Terre. Équation déterminant les axes a et b. Formule des parallaxes en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$.*

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un mobile pesant glisse sur une circonférence dont le plan est vertical et éprouve une résistance proportionnelle à la pression qu'il exerce sur la courbe. Déterminer son mouvement.*

A quelle hauteur s'élève-t-il en partant d'un point sans vitesse initiale?

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Exposer la théorie de la réfraction suivant la méthode de Laplace.*

Épreuve pratique. — *Mesure du temps.*

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définition et conditions d'existence de l'expression*

$$\int [U_x(x,y)dx - U_y(x,y)dy],$$

où $U_x(x,y)$, $U_y(x,y)$ *sont des fonctions données des variables indépendantes* x, y.

II. *Trouver, en coordonnées rectilignes rectangulaires, l'équation générale des surfaces caractérisées par la propriété que, pour chacune d'elles, le plan tangent en un point quelconque m et le plan perpendiculaire en m au rayon vecteur allant de l'origine à ce point coupent tous deux l'axe des x en un même point. Disposer des éléments d'indétermination impliqués dans cette équation, de manière que la surface représentée par elle contienne entièrement la droite*

$$x = 0, \qquad z = ay + b.$$

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Précession, nutation, petits déplacements de l'équateur et de l'écliptique.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, connaissant sa longitude et sa latitude* $L = 247^\circ 40' 50'' 8$, $\lambda = 1^\circ 43' 22''$; *l'obliquité de l'écliptique est* $23^\circ 27' 8'' 98$.

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(x+\alpha)(x^2-\alpha^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x(x+\alpha)\frac{dy}{dx}+6\alpha y=2(\alpha-x)^3,$$

sachant qu'elle peut être vérifiée par des polynomes en x.

II. *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\iiint\left[(x+y+z)^2-\frac{9}{5}a^2\right]dx\,dy\,dz,$$

lorsque x, y, z *prennent toutes les valeurs vérifiant les deux inégalités*

$$x^2+y^2-2az<0,$$
$$x^2+y^2+z^2-3a^2<0.$$

Épreuve pratique. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe*

$$y=(\sin x-\cos x)\sqrt{2},$$

x *variant de* $\frac{\pi}{4}$ *à* $\frac{5\pi}{4}$. *On demande de calculer :*

1° *L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des* x;

2° *Le volume engendré par cette aire en tournant autour de l'axe des* x;

3° *La surface qui limite ce volume.*

Paris.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} + x - y = e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} + x - z = \cos t,$$

$$\frac{dz}{dt} + x = 0;$$

on mettra l'intégrale générale sous forme réelle.

II. *Déterminer les surfaces dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe. Trouver les lignes de courbure de ces surfaces.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} dx\, dy,$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites

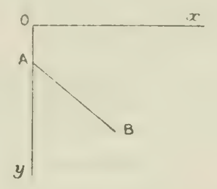
$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y - 1 = 0.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Dans un plan vertical fixe* xOy, *se meut sans frottement une barre homogène pesante* AB, *d'épaisseur infiniment petite, dont l'extrémité* A *glisse sans frottement sur l'axe fixe* Oy *dirigé suivant la verticale descendante.*

Trouver le mouvement de cette barre en supposant, à l'instant $t = 0$, *que le point* A *soit animé d'une*

vitesse donnée v_0 *suivant* Oy *et que la barre soit animée dans le plan* xOy *d'une vitesse angulaire donnée* ω_0 *autour du point* A.



Calculer la réaction de l'axe Oy *sur la barre au point* A, *à un instant quelconque.*

Examiner le cas particulier où $\omega_0 = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un ellipsoïde de révolution homogène de densité* 5 *dont la surface a pour équation*

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1,$$

et l'on détache de cet ellipsoïde la tranche comprise entre les plans $z = 0$ *et* $z = h$ *(coordonnées rectangulaires).*

1° *Déterminer la masse et le centre de gravité de cette tranche.*

2° *Calculer le moment d'inertie de cette tranche par rapport à l'axe* Oz.

MÉCANIQUE PHYSIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Principes généraux des mécanismes. Couples cinématiques. Chaînes cinématiques. Couples d'emboîtement. Exemples.*

II. *Trouver le déplacement fini d'un trièdre trirectangle* Oxyz *dans lequel le système des rotations instantanées a pour coordonnées par rapport à ce*

trièdre

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega = \text{const.},$$
$$\xi = a \cos mt + a' \sin mt,$$
$$\eta = b \cos mt + b' \sin mt,$$
$$\zeta = c \cos mt + c' \sin mt,$$

où a, b, c, a', b', c' *et* m *sont des constantes.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Établir les formules générales de la parallaxe; appliquer ces formules au cas d'une étoile. Énoncer les lois de la parallaxe annuelle d'une étoile et décrire les procédés à l'aide desquels on peut déterminer cette parallaxe?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une planète décrit une orbite elliptique d'excentricité e. Calculer les valeurs de l'anomalie vraie qui correspondent au maximum de l'équation du centre et la valeur de ce maximum.*

On prendra $e = 0,0168$ *et l'on emploiera pour le calcul des logarithmes à cinq décimales.*

BIBLIOGRAPHIE.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA THÉORIE DES FORMES ET SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES, à l'usage des candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques; par M. *H. Andoyer*. 1 vol. in-4 autographié de VI-184 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1898. Prix : 8fr.

Voici comment s'exprime l'auteur dans l'Avertissement :

La Théorie des Formes et ses applications géométriques occupent une place importante dans le programme des leçons de Mathématiques spéciales pour l'Agrégation des Sciences mathématiques en 1898.

» Aussi ai-je cru utile de publier les leçons que je fais cette année sur ce sujet aux candidats à l'Agrégation qui suivent les Conférences de la Sorbonne. La tâche m'a été d'autant plus facile que je prépare, depuis plusieurs années déjà, un Ouvrage assez considérable sur la *Théorie des Formes*, principalement au point de vue de ses applications à la Géométrie analytique.

» Voulant offrir aux candidats toutes les ressources nécessaires pour qu'ils puissent composer sans peine les leçons qu'ils auront à faire devant le jury, j'ai développé d'une façon complète, quoique aussi élémentaire que possible, la théorie des invariants des formes binaires et ternaires, en me limitant pour les formes binaires à l'étude des formes des quatre premiers degrés et de la forme bilinéaire; pour les formes ternaires, à l'étude des formes linéaires, quadratiques et bilinéaires. Pour éviter les répétitions et pour bien mettre en lumière les principes généraux, j'ai dû consacrer plusieurs pages à la théorie générale des formations invariantes. Je n'ai pas cru devoir insister sur les applications géométriques : on pourrait les multiplier pour ainsi dire indéfiniment, et j'aurais craint d'être trop long. Mais je crois en avoir dit assez pour rendre ces applications en quelque sorte immédiates, lorsqu'elles ne sortent pas du domaine auquel j'ai dû me limiter.

» La terminologie que j'ai employée et qui n'est pas, comme d'habitude, celle de la Géométrie ponctuelle, a précisément pour but, en ne spécifiant aucunement la nature des éléments géométriques que l'on peut envisager, de rendre plus faciles et plus générales les applications géométriques. J'espère que l'on estimera que cet avantage justifie suffisamment mon innovation. »

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR 1899. In-18 de VI-784 pages, avec 3 Cartes magnétiques : $1^{\text{fr}},50$ (franco, $1^{\text{fr}},85$).

La maison Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1899. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur-constructeur P. GAUTIER, *Sur le Sidérostat à lunette de soixante mètres de foyer et*

de $1^m,25$ *d'ouverture*, qu'il construit pour l'Exposition de 1900; la *Notice sur les ballons-sondes*, par M. Bouquet de la Grye, et la *Notice sur la Géodésie moderne en France,* par le Colonel Bassot.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

E. Borel. — Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Riemann. — Œuvres mathématiques, trad. par L. Laugel; 1 vol. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

A. Tissot. — Sur la polaire d'un point par rapport à une conique. (Extr. du *J. de Math. élémentaires et spéciales*). Paris, Ch. Delagrave; 1898.

de Jonquières. — Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques. (Extr. des *C. R.*, t. CXXVI). Paris, 1898.

Escary. — Remarques concernant les formules fondamentales de la Trigonométrie. Foix, Gadrat; Paris, A. Hermann; 1898.

M. Frolov. — La théorie des parallèles démontrée rigoureusement; essai sur le Livre Ier des Éléments d'Euclide. Paris, Carré et Naud; Bâle et Genève, Georg; 1898.

H. Laurent. — Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions. (Extr. du *J. de Math. pures et appliquées*). Paris, 1898.

M. de Franchis. — Sulla riduzione dell'integrali estesi a varietà. (Extr. des *Rend. del Circolo Matem.*). Palerme, 1898.

Bulletin international de l'Académie des Sciences. Cracovie, 1898.

G. Vailati. — Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Turin, Roux Frassati; 1898.

G. Vailati. — Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi. (Extr. des *Atti de l'Ac. R. des Sciences*). Turin, 1898.

J. Fola Igurbide. — La nouvelle science géométrique (Géométrie du cercle). 1 vol. grand in-8° (trad. française). Barcelone, J. Rorná; 1898.

L'abbé Issaly. — Sur une formule d'Enneper, et sa corrélative. (Extr. du *Bull. de la Soc. Math. de France.*) Paris, 1898.

L. Lecornu. — Régularisation du mouvement dans les machines. (*Encycl. scientif. des Aide-Mémoire;* H. Léauté, Directeur.) Paris, Gauthier-Villars et fils, Masson et Cie.

Elie Perrin. — Préliminaire d'une géométrie du triangle. (Extr.

des *Comptes rendus de l'Ass. fr. pour l'avancement des sciences;* congrès de Saint-Étienne, 1897.)

P. Mansion. — Mélanges mathématiques (1883-1898); 1 vol. grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1898.

Ch. Brisse et H. Picquet. — Cours de Géométrie descriptive professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures; 1 vol. grand in-8°. Paris, Baudry et Cie; 1898.

H. Lagrésille. — Métaphysique mathématique : Essai sur les fonctions métaphysiques (morphologie de l'âme). Paris, Dunod; 1898.

B. Niewenglowski et L. Gérard. — Cours de Géométrie élémentaire. Géométrie plane; 1 vol. in-8°. Paris, Carré et Naud; 1898.

E.-M. Lémeray. — Le quatrième algorithme naturel. (Extr. des *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.*, 1897-1898).

H. Weber. — Traité d'Algèbre supérieure; trad. de l'allemand sur la 2e éd. par J. Griess; 1 vol. grand in-8°, 764 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Bullettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, publié par Gino Loria. Turin, 1898.

Giornale di Matematiche di Battaglini, continué par A. Capelli; vol. XXXVI. Naples, 1898.

A. Capelli. — Lezioni di Algebra complementare; 2e édition. Naples, Pellerano; 1898.

G. Peano. — Formulaire de Mathématique, publié par la *Revue de Mathématiques;* T. II, n° 2. Arithmétique. Turin, Bocca, Clausen; 1898.

J. Petersen. — Vorlesungen über Funktionstheorie. Copenhague, A.-F. Höst; 1898.

Dr F. Rudio. — Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congress in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Leipzig, Teubner; 1898.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigé sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam; T. VI, 2e Partie (octobre 1897-avril 1898).

A. Guldberg. — Sur la théorie des congruences différentielles linéaires. Christiania, J. Dybwad, 1897.

QUESTIONS.

434 (**1858**, 186). L'équation

$$c_0 x^n + \frac{n}{1} c_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} c_2 x^{n-2} + \ldots + n_1 c_{n-1} x + c_n = 0$$

a *au moins* autant de racines imaginaires qu'on trouve de variations de signes dans la suite

$$c_0^2,\quad c_1^2 - c_0 c_2,\quad c_2^2 - c_1 c_3,\quad \ldots,\quad c_{n-1}^2 - c_{n-2} c,\quad c_n^2.$$

(NEWTON.)

Note.— La démonstration d'Euler (*Introduction au Calcul infinitésimal*) n'est pas satisfaisante. (GENOCCHI.)

439 (**1858**, 187). On donne le périmètre et l'axe d'une ellipse; calculer l'autre axe soit par une série convergente, soit par des approximations successives.

448 (**1858**, 359). Soient A et B les extrémités du grand axe $2a$ d'une ellipse, C le centre, O un point fixe dans le plan de l'ellipse et $OC = d$; inscrivons dans l'ellipse un polygone de $2n$ côtés, projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale; A et B étant deux sommets opposés, menons du point O des rayons successifs $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{2n}$, et par le centre des demi-diamètres $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{2n}$ respectivement parallèles à ces rayons, on a les deux relations

$$\frac{r_1}{R_1}\,\frac{r_3}{R_3}\,\frac{r_5}{R_5}\cdots\frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} = \pm\left(1 + \frac{d}{a}\right)^n,$$

$$\frac{r_2}{R_2}\,\frac{r_4}{R_4}\,\frac{r_6}{R_6}\cdots\frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \pm\left(1 - \frac{d}{a}\right)^n,$$

le signe supérieur lorsque le point O est dans l'intérieur, et le signe inférieur lorsque le point est extérieur.

ERRATA.

3e série, Tome XVII, 1898. — Page 314, et Tables, p. 585, ligne 10, en remontant : *classer à* **K11d**, *au lieu de* **O2q**, l'article de M. d'Ocagne : « Sur les raccordements par arcs de cercles. »

[D4] [J5]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. Paul STAECKEL,
Professeur à l'Université de Kiel.

Mathematische Annalen, t. XLVI, p. 514-520

Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.

I.

Théorème. — *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ les points d'un ensemble* dénombrable *quelconque* P *de points dans le domaine de la quantité complexe à variabilité illimitée x, tandis que l'on désignera par* Q *un ensemble quelconque* partout dense *de points dans ce plan. Il existe alors toujours une infinité de* fonctions uniformes analytiques *$f(x)$ qui, pour tous les arguments $x_0, x_1, \ldots$ de l'ensemble* P, *prennent seulement des valeurs appartenant à l'ensemble* Q.

Démonstration. — Construisons les fonctions rationnelles entières

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = x - x_0,\\
&\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_\nu(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{\nu-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et considérons d'une manière d'abord purement formelle

l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x);$$

les quantités u_ν sont des constantes dont on a encore la faculté de disposer.

On a alors

$$f(x_0) = u_0,$$

et l'on peut donc poser

$$u_0 = y_0,$$

où y_0 est un point quelconque de l'ensemble Q. Il vient ensuite

$$f(x_1) = y_0 + u_1 x_1 (x_1 - x_0).$$

Si l'on fait encore cette convention que $x_0 = 0$, lorsque le point $x = 0$ appartient à l'ensemble P, l'on peut alors poser

$$u_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1(x_1 - x_0)},$$

où y_1 est un point quelconque de l'ensemble Q. On obtient de la même manière

$$f(x_2) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x_2(x_2 - x_0)}{x_1(x_1 - x_0)} + u_2 x_2^3 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

et l'on peut encore déterminer u_2 de telle sorte que l'on ait

$$f(x_2) = y_2,$$

où y_2 est un point quelconque de l'ensemble Q.

Si l'on procède ainsi successivement, après avoir déterminé $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$, on a pour u_ν une équation de la forme

$$y_\nu = a_\nu + u_\nu x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

où u_ν désigne une fonction rationnelle connue de x_0, $x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ et de $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$, tandis que y_ν est un point quelconque de l'ensemble Q.

Il résulte de ceci que, pour une pareille détermination des constantes u_ν, l'expression $f(x)$, considérée d'une manière formelle, possède la propriété requise, et il ne reste donc plus qu'à rechercher comment doivent être choisis les points $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, \ldots$ encore arbitraires, de l'ensemble Q de façon que $f(x)$ soit une *série de puissances de x toujours convergente.*

Si, dans le terme

$$u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x),$$

on effectue les multiplications en ordonnant ensuite suivant les puissances ascendantes de x, le développement commence avec l'exposant

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

et finit avec l'exposant

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\nu = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2)-1.$$

Par conséquent $f(x)$, lorsqu'on effectue les multiplications, se transforme en une série de puissances de x que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1} u_\nu c_{\nu,\alpha} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha};$$

ici $c_{\nu,\alpha}$ désigne le coefficient de x^α dans $\varphi_\nu(x)$.

Par suite, si pour chaque valeur entière positive on parvient à satisfaire aux inégalités

$$|u_\nu c_{\nu,\alpha}| \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

ou, ce qui revient au même, aux suivantes

$$\left| \frac{(y_\nu - a_\nu) c_{\nu,\alpha}}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0) \ldots (x_\nu - x_{\nu-1})} \right| \leqq \frac{1}{[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha]!},$$

alors cette série de puissances pour $f(x)$ sera toujours convergente. Or, il est toujours possible d'atteindre ce but d'une infinité de manières, *car les points de l'ensemble* Q *doivent recouvrir le plan de la variable complexe x d'une manière* PARTOUT DENSE; en effet, d'après cela, les y_ν peuvent être choisis suffisamment voisins des a_ν pour que les valeurs absolues des ν grandeurs

$$(y_\nu - a_\nu) \frac{c_{\nu,\alpha} [\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha]!}{x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0) \ldots (x_\nu - x_{\nu-1})}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

soient toutes inférieures à *l'unité*.

Par conséquent, l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x)$$

représente une fonction uniforme analytique, possédant un seul point singulier essentiel $x = \infty$, qui, pour tous les arguments pris dans l'ensemble *dénombrable* P, prend seulement des valeurs appartenant à l'ensemble *partout dense* Q; que les constantes u_ν s'évanouissent toutes à partir d'un certain indice déterminé, c'est ce que l'on peut toujours empêcher, cela saute aux yeux, au moyen d'un choix convenable des points y_ν.

Corollaire. — Un théorème analogue a lieu lorsque l'ensemble dénombrable P est formé de points tous *réels* et que l'ensemble Q est partout dense sur l'*axe des quantités réelles*.

II.

Applications. — Pour faire des applications de ce théorème général, je vais d'abord supposer que l'ensemble P est constitué par la totalité des *nombres complexes rationnels* et que l'on a, par conséquent,

$$x_\nu = x'_\nu + i x''_\nu,$$

où x'_ν, x''_ν désignent des nombres rationnels réels. L'ensemble Q peut, ce qui est permis, être identique à l'ensemble P. On a alors ce théorème :

Il existe une infinité de fonctions transcendantes *de la variable complexe x qui, pour toutes les valeurs rationnelles de leur argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes rationnelles.*

Cette propriété, par conséquent, n'est *pas* caractéristique pour les fonctions rationnelles de x à coefficients rationnels. Il est vrai que l'on a, d'après M. Hilbert (¹), le théorème :

« Lorsqu'une fonction *algébrique* de x, pour toutes les valeurs réelles rationnelles comprises dans un intervalle, quelque petit qu'il soit, prend toujours elle-même des valeurs rationnelles, alors cette fonction est nécessairement rationnelle. »

Qu'une fonction analytique qui, pour toutes les valeurs réelles rationnelles de l'argument, prend elle-même des valeurs réelles rationnelles, doive être nécessairement une fonction rationnelle; c'est ce qu'Émile Strauss, mathématicien plein de talent, mort prématurément, avait cherché à démontrer en 1886; mais

---

(¹) *Journal de Crelle*, t. 110, p. 129; 1892.

Weierstrass, à qui il avait annoncé qu'il recherchait cette démonstration, lui fit remarquer l'inutilité de ses efforts. En effet, Weierstrass construisit une fonction *transcendante* de x possédant la propriété exigée.

Avec sa bienveillante autorisation, je puis ici communiquer le passage en question de sa lettre du 19 mars 1886 à Strauss ([1]) :

« ... On posera (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\varphi_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{n-1-\nu}{\nu} \right)^2 x^2 \right],$$

$$f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x);$$

alors $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ sont des fonctions rationnelles entières de x à coefficients numériques tous rationnels; le degré de la première est $2n$, celui de l'autre est

$$2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1).$$

» On posera enfin

$$\begin{aligned} m_1 &= 1, \\ m_2 &= m_1 + 1.2 + 1, \\ m_3 &= m_2 + 2.3 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{\nu+1} &= m_\nu + \nu(\nu+1) + 1. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

» On peut alors déterminer une série infinie de nombres rationnels

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots,$$

([1]) Je dois une copie de cette lettre à la bonté de Mme M. Speyer, née Strauss, que je saisis l'occasion de remercier ici.

en sorte que l'expression

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} f_1(x) + a_2 x^{m_2} f_2(x) + \ldots + a_n x^{m_n} f_n(x) + \ldots$$

soit une fonction transcendante entière de x et soit représentable par une série de puissances toujours convergente de la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

où les coefficients sont tous des nombres rationnels.

» A cet effet, prenons une série quelconque de puissances de x, toujours convergente

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients tous positifs, et alors (pour chaque valeur déterminée de n) choisissons a_n de telle sorte que, dans la fonction développée suivant les puissances de x

$$a_n x^{m_n} f_n(x),$$

le coefficient de chaque terme soit en valeur absolue plus petit que le coefficient du terme renfermant la même puissance de x dans la série

$$C_0 + C_1 x + \ldots.$$

» Alors, non seulement l'expression $f(x)$ sera convergente pour chaque valeur finie de x, mais encore elle peut être aussi transformée en une série de puissances toujours convergente jouissant de la propriété énoncée. Il est clair en même temps que, dans cette série, les coefficients de

$$x^{m_1}, \quad x^{m_2}, \quad \ldots, \quad x^{m_n}, \quad \ldots$$

sont respectivement

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n;$$

et, par conséquent, lorsqu'on prend les nombres a_1, a_2,

$a_3, \ldots$ de telle sorte qu'à partir d'un rang déterminé ils ne soient pas tous égaux à zéro, la série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

est une série *infinie* et représente par suite une fonction *transcendante* entière de x.

» Ceci posé, soit maintenant x_0 un nombre rationnel quelconque, différent de zéro, que l'on mettra sous la forme

$$\pm \frac{\lambda}{\mu},$$

où λ, μ sont des nombres entiers positifs sans diviseur commun ; on a alors

$$\varphi_{\lambda+\mu-1}(x_0) = 0;$$

par conséquent, toutes les fonctions $f_n(x)$ pour lesquelles on a

$$n \geq \lambda + \mu - 1,$$

s'évanouissent pour $x = x_0$ et $f(x)$ possède une valeur *rationnelle*.

» Il en est de même pour $x = 0$ et l'on a donc démontré que :

» Il existe des fonctions *transcendantes* entières d'une variable, jouissant de cette propriété que, pour *chaque* valeur rationnelle de leur argument, elles ont également une valeur rationnelle.... »

« J'observerai encore qu'il est possible (de bien des manières) de former une fonction transcendante entière de x qui ait des coefficients tous rationnels et qui, pour chaque valeur algébrique de x, ait également une valeur algébrique. »

Inspiré par cette dernière remarque de Weierstrass, Strauss a cherché à construire une pareille fonc-

tion transcendante de x et il s'y est pris comme il suit (¹) :

A l'exemple de M. Georg Cantor (²) à toute fonction numérique irréductible de x

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

on attribuera comme *hauteur* (Höhe) le nombre entier positif

$$h = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Le produit de toutes les fonctions de même hauteur h est une fonction entière de x à coefficients entiers, divisible par x, que l'on désignera par $f_n(x)$. Si l'on forme alors les produits

$$g_h(x) = \prod_{\lambda=1}^{h} f_\lambda(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

l'expression

$$G(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{\mu_h} g_h(x),$$

où les μ_h doivent être des nombres entiers positifs, jouit, cela saute aux yeux, de cette propriété, qu'à chaque valeur algébrique de x (dans la région de convergence) correspond une valeur algébrique de $G(x)$.

Si l'on définit maintenant les nombres μ_h au moyen des équations

$$\mu_h = M_1 + M_2 + \ldots + M_h$$
$$+ (h-1)\lambda_1 + (h-2)\lambda_2 + \ldots + 2.\lambda_{h-1} + 1.\lambda_h$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

(¹) *Berichte des freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt am Main* (neue Folge. Dritter Band, p. 18-29; 1890).

(²) *Journal de Crelle*, t. 77, p. 259; 1873.

où M_1, M_2, ..., M_h désignent respectivement les coefficients les plus élevés en valeur absolue de g_1, g_2, ..., g_h, et où λ_1, λ_2, ..., λ_h désignent respectivement les degrés de ces derniers produits, alors $G(x)$ est une série de puissances de x qui a pour cercle de convergence *le cercle qui a pour rayon l'unité.*

Que $G(x)$ ne représente aucune fonction *rationnelle* de x, c'est ce qui est facile à reconnaître.

En effet, la puissance la plus élevée de x dans

$$x^{\mu_{h-1}} g_{h-1}(x)$$

a pour exposant $\mu_h - M_h$; la puissance la moins élevée de x dans

$$x^{\mu_h} g_h(x)$$

a pour exposant $\mu_h + 1$, de telle sorte que les M_h puissances de x intermédiaires ont pour coefficient zéro. Maintenant, comme les grandeurs M_h pour h croissant surpassent toute limite finie, il ne peut exister entre les coefficients de la série de puissances $G(x)$ aucune formule de récurrence d'ordre fini, comme cela devrait avoir lieu si cette série de puissances représentait une fonction *rationnelle* de x.

Néanmoins, lorsque de ce qui précède Strauss conclut qu'il a trouvé en $G(x)$ une fonction *transcendante* jouissant de la propriété requise, il oublie alors cette possibilité que le prolongement analytique de sa série de puissances, pourrait bien ne pas fournir une fonction *rationnelle,* mais une fonction *algébrique* de x. *Sa démonstration, d'ailleurs très ingénieuse, ne peut donc pas être regardée comme valable.*

On peut du reste combler cette lacune. Dans ce but il suffit en effet d'observer qu'à chaque valeur *rationnelle* de x (à l'intérieur du cercle de rayon égal à l'unité) correspond une valeur *rationnelle* de $G(x)$ et

de se rappeler alors le théorème précédemment cité de M. Hilbert. Par conséquent $G(x)$ représente effectivement une fonction *transcendante* de x.

Mais, même si l'on fait abstraction du fait que l'exemple indiqué par Strauss ne possède pas la simplicité désirable, il se présente encore le défaut essentiel qui suit. Cet exemple montre seulement qu'à chaque valeur algébrique de x *intérieure au cercle de rayon égal à l'unité* peut correspondre une valeur algébrique d'une fonction transcendante ; et ainsi reste encore ouverte la question de savoir s'il existe aussi des fonctions transcendantes de x pour lesquelles, à *chaque* argument (fini) algébrique, correspond une valeur algébrique de la fonction.

Cette question doit être résolue affirmativement; c'est ce qui résulte de mon théorème général, quand pour ensemble P *l'on prend la totalité des nombres algébriques et que l'on suppose l'ensemble* Q *identique à l'ensemble* P. Il est à peine nécessaire de dire que pour un choix convenable des nombres algébriques qui forment l'ensemble P, l'on peut obtenir pour $f(x)$ une série de puissances, toujours convergente, à coefficients tous *rationnels*.

D'ailleurs, lorsqu'on a une telle série de puissances $f(x)$ *toujours convergente*, on peut aussi assigner immédiatement une infinité de séries de puissances à *convergence limitée* jouissant de la même propriété et représentant également des fonctions *transcendantes*. A cet effet, l'on a besoin seulement d'adjoindre à $f(x)$ une série de puissances provenant d'une équation algébrique quelconque

$$g(x,y) = 0,$$

à coefficients entiers.

Et l'on peut encore aller plus loin. Si l'on suppose que P est constitué par tous les nombres *algébriques* et Q par tous les nombres *rationnels,* on obtient ce théorème :

Il existe une infinité de fonctions transcendantes de x, qui, pour toutes les valeurs algébriques *de l'argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes* rationnelles.

Qu'il existe des fonctions d'une variable *réelle,* qui, pour toutes les valeurs réelles algébriques de l'argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes réelles rationnelles, c'est ce qui m'a été communiqué oralement par M. Georg Cantor; cela m'a inspiré le désir de démontrer le théorème correspondant pour les fonctions d'une variable *complexe*.

La remarque suivante servira ici de conclusion. D'après M. Lindemann [1] la fonction e^x possède cette propriété de prendre pour toutes les valeurs *algébriques* de l'argument, *la valeur zéro exceptée,* des valeurs *transcendantes*. Mais il existe aussi des fonctions analytiques de x, pour lesquelles à chaque valeur algébrique de l'argument, *sans exception,* correspond une valeur transcendante de la fonction; en effet, ici, l'on a seulement besoin de supposer que l'ensemble P est la totalité des nombres algébriques, tandis que l'ensemble Q est la totalité des nombres transcendants complexes.

---

[1] *Mathematische Annalen,* t. XX, p. 224; 1882.

[A3k]

NOUVEAU PROCÉDÉ POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. ANTOINE PLESKOT,
Professeur à l'École royale de Plzeň (Bohême).

Nous allons chercher dans l'équation du second degré

$$x^2 + ax + b = 0$$

la relation entre a et b, de sorte qu'une de ses racines soit le carré de l'autre.

Si x est une de ses racines, on aura

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x + x^2 = -a, \\ x^3 = b. \end{cases}$$

On tire tout de suite de ces deux équations

$$x = \varepsilon \sqrt[3]{b}, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{1}$$

et

$$(\beta) \qquad \varepsilon \sqrt[3]{b} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{b^2} = -a.$$

Mais on peut exprimer la relation entre a et b sous une autre forme, en déterminant la résultante des équations (α); on trouvera aisément

$$(\gamma) \qquad a^3 - 3ab + b^2 + b = 0.$$

On considère maintenant, dans l'équation (γ), a comme une inconnue, et alors ses racines sont données par l'équation (β). On peut se servir de cette remarque pour résoudre l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

si on lui donne la forme de l'équation (γ).

A cet effet, formons une équation dont les racines soient λ fois les racines de l'équation (1).

Cette équation est la suivante :

$$(2) \qquad x^3 + p\lambda^2 x + q\lambda^3 = 0.$$

Si cette équation doit avoir la forme de l'équation (γ), il en résulte que

$$p\lambda^2 = -3b,$$
$$q\lambda^3 = b + b^2.$$

En éliminant b entre ces équations, on obtient la valeur de λ. L'équation résultante est

$$\lambda^2 - 9\frac{\lambda q}{p^2} - \frac{3}{p} = 0;$$

il en résulte

$$(3) \qquad \lambda = \frac{9q}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} + \frac{3}{p}},$$

relation où l'on peut choisir soit le signe + soit le signe —. Mais puisque

$$b = -\frac{p\lambda^2}{3},$$

les racines de l'équation (2), d'après (β), sont

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}};$$

d'autre part, les racines de l'équation (1) sont λ fois plus petites; donc elles sont données par la formule

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p}{3\lambda}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda}{9}}.$$

Si l'on substitue à λ la valeur fournie par l'équation (3), les racines vont prendre la forme connue

$$x = \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

[$L^2 17d$]

SUR DES POLYÈDRES MOBILES COMPARABLES AUX POLYGONES DE PONCELET;

Par M. G. FONTENÉ.

I.

Théorème I. — *Étant données deux quadriques* U *et* V, *pour que les huit conditions par lesquelles un tétraèdre* $\mathcal{ABCD}$ *est circonscrit à l'une et inscrit à l'autre se réduisent à sept, ou encore pour que les tétraèdres circonscrits à l'une et inscrits à l'autre dépendent de cinq paramètres au lieu de quatre, il faut et il suffit que ces deux quadriques aient quatre génératrices communes.*

1° La condition est suffisante. Soient LM, MN, NP, PL les quatre génératrices communes; les deux quadriques admettent en nombre doublement infini des tétraèdres conjugués communs ABCD, les arètes AC et BD étant dirigées suivant LN et MP; un plan tangent à la quadrique U rencontre LN et MP en deux points que nous prendrons comme points A et B. Les équations des deux quadriques U et V rapportées au tétraèdre ABCD sont

$$(U) \qquad X^2 - Y^2 - Z^2 + T^2 = 0,$$

$$(V) \qquad X^2 - k^2 Y^2 - Z^2 + k^2 T^2 = 0:$$

le plan tangent à U est $Z = T$. Prenons sur la quadrique V un point $\mathcal{A}$ de coordonnées a, b, c, d, ce qui donne

$$k = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}, \qquad k - 1 = \frac{(a^2 - b^2) - (c^2 - d^2)}{b^2 - d^2},$$

et considérons le cône de sommet $\mathcal{D}$ circonscrit à U :

$$(k-1)(b^2-d^2)(X^2-Y^2-Z^2+T^2) \\ -(aX-bY-cZ+dT)^2=0.$$

Il faut démontrer que, si l'on coupe ce cône et la quadrique V par le plan $Z=T$, tangent à U, les deux coniques u et v obtenues admettent des triangles $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ circonscrits à u et inscrits à v; s'il en est ainsi, les tétraèdres $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ dépendent de cinq paramètres : deux pour le sommet $\mathcal{D}$, deux pour le plan $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, un pour le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$. Or on a, en faisant $Z=T$ dans l'équation du cône et dans celle de la quadrique V,

$$(u)\quad (k-1)(b^2-d^2)(Y^2-X^2)+[aX-bY-(c-d)Z]^2=0,$$
$$(v)\quad X^2-kY^2+(k-1)Z^2=0,$$

et les invariants du système doivent satisfaire à la relation connue $\theta^2-4\delta\theta'=0$. On trouve d'abord

$$\delta=-(c-d)^2(b^2-d^2)^2(k-1)^2;$$

on a ensuite

$$\theta=(k-1)(b^2-d^2)[(k+1)(c-d)^2-(k-1)^2(b^2-d^2) \\ +(k-1)(a^2-b^2)],$$

ou, en remplaçant dans le crochet $(k-1)(b^2-d^2)$ par $a^2-b^2-c^2+d^2$,

$$\theta=2(c-d)(b^2-d^2)(k-1)(kc-d);$$

on a enfin

$$\theta'=(k-1)(b^2-d^2)(k^2-1)-a^2k(k-1) \\ +b^2(k-1)-k(c^2+d^2-2cd),$$

ou, en remplaçant $(k-1)(b^2-d^2)$ par

$$a^2-b^2-c^2+d^2,$$

$$\theta'=-k^2c^2-k^2(b^2-d^2)-(a^2-c^2)-d^2 \\ +k(a^2-c^2)+k(b^2-d^2)+2kcd=-(kc-d)^2;$$

on a donc bien $\theta^2-4\delta\theta'=0$.

2° La condition est nécessaire. Les deux quadriques U et V étant supposées quelconques, si l'on se donne le sommet $\mathcal{O}$ sur la quadrique V, les plans $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ sont les plans tangents communs à la quadrique U et à une surface qui est l'enveloppe des plans coupant le cône de sommet $\mathcal{O}$ circonscrit à U, et la quadrique V, suivant deux coniques u et v qui admettent des triangles circonscrits à u et inscrits à v; or, il existe une quadrique U′ inscrite au cône et ayant avec V quatre génératrices communes : cette quadrique est l'enveloppe en question, d'après ce qu'on a vu; dès lors, pour que le plan tangent à la quadrique U puisse être quelconque, il est nécessaire que la quadrique U, qui doit se confondre avec U′, ait avec V quatre génératrices communes.

Quand les deux quadriques U et V sont quelconques, comme les deux quadriques U et U′ sont inscrites à un même cône, elles ont un second cône circonscrit commun, de sorte que les plans $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, tangents à U, qui correspondent à un même point $\mathcal{O}$ pris sur V, passent par un point déterminé.

Théorème II. — *Pour que deux quadriques* U *et* V *admettent des tétraèdres dont les arêtes leur soient tangentes, il faut que les racines du discriminant de la forme* $\lambda U + V$, *soit*

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta',$$

vérifient la relation

$$(1) \qquad \Sigma\varepsilon\sqrt{\lambda}.\varepsilon'\sqrt{\lambda'} = 0.$$

ce qui a lieu si les invariants vérifient la relation

$$(1') \qquad \Phi = \pm 2\sqrt{\Delta\Delta'} \pm 2\sqrt{\Theta\Theta'},$$

ou

$$(1'') \qquad \Phi^4 - 8\Phi^2(\Delta\Delta' + \Theta\Theta') + 16(\Delta\Delta' - \Theta\Theta')^2 = 0;$$

il existe alors une simple infinité de tétraèdres répondant à la question.

1° Si un tel tétraèdre existe, en le prenant comme tétraèdre de référence, les équations des deux quadriques sont de la forme

$$A^2x^2 + B^2y^2 + \ldots - 2ABxy - \ldots = 0;$$

en posant $\frac{A'}{A} = \alpha, \ldots$, on trouve que les rapports des cinq invariants ne dépendent que des trois quantités $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$, et une élimination facile donne la relation $(1')$. Le discriminant, égalé à zéro, donne

$$(\lambda^2\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta'})^2 - \lambda(\lambda\sqrt{-\Theta} \pm \sqrt{-\Theta'})^2 = 0,$$

ou, en désignant $\sqrt{\lambda}$ par μ,

$$\mu^4\sqrt{\Delta} \pm \mu^3\sqrt{-\Theta} \pm \mu\sqrt{-\Theta'} \pm \sqrt{\Delta'} = 0,$$

ce qui donne la relation (1); on verrait d'ailleurs que (1) donne $(1')$ en comparant cette équation en μ à l'équation aux carrés des racines;

2° Considérons la figure formée par un tétraèdre et deux quadriques inscrites aux arêtes : en partant du tétraèdre, cette figure dépend de paramètres en nombre

$$12 - 3 + 3 = 18;$$

si l'on part des deux quadriques, liées par la relation (1), et dépendant de dix-sept paramètres, le tétraèdre doit dépendre d'un paramètre. Il y aurait à chercher la courbe Γ qui est le lieu des sommets des tétraèdres, celle Γ' qui est osculée par les plans des faces, et la surface réglée qui est le lieu des arêtes. Si l'on considère le

tétraèdre infiniment voisin du tétraèdre de référence et répondant à la question, en désignant les coordonnées des sommets par $(1+\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')$, $(\beta, 1+\beta', \beta'', \beta''')$, ..., et en supposant $A' = B' = C' = D' = 1$, on a, avec ε infiniment petit,

$$\frac{\alpha'}{(AB - CD)(C - D)} = \frac{\alpha''}{(AC - DB)(D - B)}$$
$$= \frac{\alpha'''}{(AD - BC)(B - C)} = -A\varepsilon,$$
$$\frac{\beta''}{(BC - DA)(D - A)} = \frac{\beta'''}{(BD - AC)(A - C)}$$
$$= \frac{\beta}{(BA - CD)(C - D)} = -B\varepsilon,$$

....;

on constate que la courbe Γ ne peut pas être une cubique gauche, comme on pourrait le soupçonner; les tangentes en A, B, C, D percent les plans BCD, ..., en des points α, β, γ, δ, tels que le plan $\beta\gamma\delta$ par exemple passe en A. On a un fait corrélatif pour la courbe Γ'.

Pour deux sphères, quadriques bitangentes, en appelant d la distance des centres, R et R' les rayons, on obtient

$$R = R' \quad \text{ou,} \quad \frac{2d}{\sqrt{3}} = \pm R \pm R';$$

dans le second cas, les tétraèdres sont des pyramides triangulaires régulières, disposées autour de la ligne des centres, et la réalité suppose la relation avec deux signes +; dans le premier cas, les tétraèdres ont leurs arêtes opposées égales deux à deux, et ils dépendent de deux paramètres.

Remarque. — Il y aurait à chercher si les dix conditions par lesquelles un tétraèdre a ses arêtes tangentes à une quadrique L et est inscrit (ou circonscrit) à

une quadrique V peuvent se réduire à un nombre moindre.

II.

La figure corrélative d'un octaèdre à diagonales concourantes est un hexaèdre pour lequel les droites d'intersection des plans des faces opposées sont dans un même plan, ou, d'une manière abrégée, un hexaèdre à intersections coplanaires. Comme deux quadriques

$$\Sigma A x^2 = 0, \qquad \Sigma A' x^2 = 0,$$

sont polaires réciproques par rapport à chacune des huit quadriques

$$\Sigma \pm \sqrt{AA'}\, x^2 = 0,$$

des hexaèdres à intersections coplanaires circonscrits à une quadrique U et inscrits à une quadrique V donnent lieu à des octaèdres à diagonales concourantes circonscrits à U et inscrits à V.

Théorème III. — *Si l'on se propose d'obtenir un hexaèdre à intersections coplanaires, ou un octaèdre à diagonales concourantes, circonscrit à une quadrique U et inscrit à une quadrique V, le problème, qui paraît être doublement indéterminé, n'est possible que si les racines du discriminant de la forme $\lambda U + V$ vérifient la relation*

$$(2) \qquad -\lambda + \lambda' - \lambda'' + \lambda''' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\lambda = 2\lambda,$$

ce qui a lieu si le discriminant admet la racine $\frac{-\Theta}{2\Delta}$, ou encore si l'on a

$$(2') \qquad \Theta^4 - 4\Delta\Theta^2.\Phi - 8\Delta^2\Theta.\Theta' - 16\Delta^3.\Delta' = 0;$$

le problème est alors triplement indéterminé. Le plan des intersections est le même pour tous les hexaèdres,

c'est le plan ABC de l'une des faces du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques, et le triangle $\mathcal{LMN}$ des intersections est l'un quelconque des triangles conjugués par rapport à la conique U suivant laquelle le plan ABC coupe la quadrique V; le point de concours des diagonales est le même pour tous les octaèdres, c'est le sommet D du tétraèdre conjugué commun, et le trièdre des diagonales est l'un quelconque des trièdres conjugués par rapport au cône de sommet D circonscrit à la quadrique U.

1° Un hexaèdre à diagonales coplanaires circonscrit à une quadrique U dépend de neuf paramètres; si une quadrique V passe par les huit sommets, cela fait sept conditions; mais V n'est pas quelconque par rapport à U. Si D est le pôle du plan $\mathcal{LMN}$ par rapport à U, comme les équations des six plans rapportés au tétraèdre $\mathcal{LMN}$D sont

$$x = \pm at, \qquad y = \pm bt, \qquad z = \pm ct,$$

de sorte que l'on a pour les coordonnées des huit sommets

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{t^2}{1},$$

la quadrique V est conjuguée par rapport au tétraèdre $\mathcal{LMN}$D, D est le pôle du plan $\mathcal{LMN}$ par rapport à V, et la section de V par ce plan est une conique v conjuguée au triangle $\mathcal{LMN}$. Si l'on désigne par δ, θ, θ', δ' les invariants du système des deux coniques u et v obtenues en coupant les quadriques U et V par le plan $\mathcal{LMN}$, on trouve que le discriminant de la forme λU + V doit être, à un facteur près,

$$(\delta\lambda + \theta)(\delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \delta'),$$

ce qui donne la condition (2).

2° Comme pour le théorème II (pour le théorème I, où l'on a démontré d'abord que la condition est suffisante, on a dû employer un autre mode de raisonnement). Le théorème comprend la sphère de Monge, et peut s'y ramener; les diagonales des octaèdres sont alors trois diamètres conjugués de la quadrique U.

Pour deux sphères, quadriques bitangentes, on doit avoir

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

ou

$$d^2 = R^2 + R'^2 \pm 2R\sqrt{R^2 + R'^2}.$$

Remarque. — Si l'on demande un polyèdre d'espèce donnée, dont les arêtes soient tangentes à une quadrique donnée, ce polyèdre dépend de six paramètres; s'il s'agit d'un hexaèdre dont les plans des faces doivent toucher une autre quadrique donnée, ou d'un octaèdre dont les sommets doivent être sur une quadrique donnée, le problème paraît être déterminé. L'est-il réellement?

[A2a]

SOLUTION GRAPHIQUE DE n ÉQUATIONS LINÉAIRES AVEC n VARIABLES;

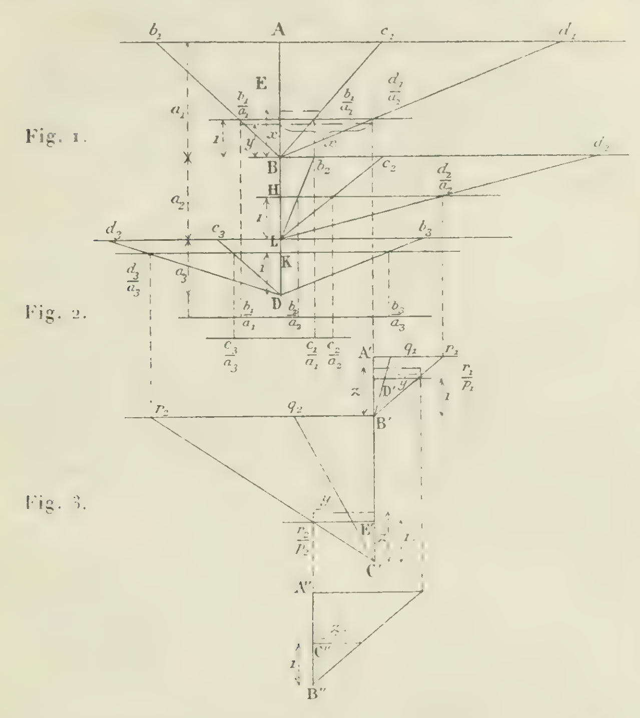
PAR M. F.-J. VAES.

La solution suivante est très simple et est applicable à toute valeur de n.

Soit donné le système :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3;$$

prenons (*fig.* 1) $AB = a_1$, $BE = 1$, traçons par E et A des perpendiculaires sur AB, mesurons sur la droite pas-



sant par A des longueurs $= b_1, c_1, d_1$ à partir de A, et en ayant égard au signe, et joignons avec B les points obtenus; alors sur la droite qui passe par E on obtiendra des longueurs $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{d_1}{a_1}$.

En agissant de même pour a_2 et a_3, on obtiendra des longueurs $\frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$, comme l'indique la *fig.* 1.

Les équations peuvent s'écrire

$$\frac{d_1}{a_1} = x - \frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} z, \qquad \ldots$$

d'où résulte

$$\frac{d_2}{a_2} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right) y + \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}\right) z$$

et

$$-\frac{d_3}{a_3} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_1}{a_1}\right) y - \left(\frac{c_3}{a_3} + \frac{c_1}{a_1}\right) z,$$

relations dans lesquelles x ne se trouve plus.

Écrivons pour plus de simplicité

$$r_1 = p_1 y + q_1 z, \qquad -r_2 = p_2 y - q_2 z;$$

les valeurs de r_1, p_1, ..., peuvent être mesurées directement sur la *fig.* 1.

Prenons (*fig.* 2) $A'B' = p_1$, $A'q_1 (-A'B') = q_1$, $A'r_1 = r_1$, $B'D' = 1$; alors nous obtiendrons sur la perpendiculaire par D' sur B'D' des longueurs $\frac{r_1}{p_1}$ et $\frac{q_1}{p_1}$.

Faisons $B'C' = p_2$, $C'E' = 1$ et nous trouverons des longueurs $\frac{r_2}{p_2}$ et $\frac{q_2}{p_2}$.

Puisque

$$\frac{r_1}{p_1} = y + \frac{q_1}{p_1} z \qquad \text{et} \qquad -\frac{r_2}{p_2} = y - \frac{q_2}{p_2} z,$$

il en résulte

$$\frac{r_2}{p_2} - \frac{r_1}{p_1} = \left(\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}\right) z,$$

relation d'où z se tire par le moyen indiqué dans la *fig.* 3, où $A''B'' = \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}$, $B''C'' = 1$.

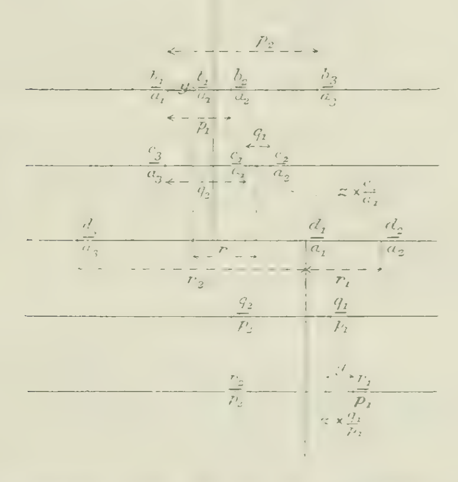
z étant trouvée, nous pouvons prendre sur B'A' une longueur $= z$, et tracer par le point obtenu une perpendiculaire sur B'A'. A droite de B'A' nous trouvons une longueur $z \times \frac{q_1}{p_1}$ laquelle peut être soustraite de la longueur $\frac{r_1}{p_1}$, ce qui donne la valeur de y.

Comme moyen de contrôle, nous pouvons aussi chercher y dans la partie inférieure de la *fig.* 2, où

$$y = -\left(\frac{r_2}{p_2} - z \times \frac{q_2}{p_2}\right).$$

Mesurons les valeurs de y et de z sur BA dans la *fig.* 1; alors nous aurons sur les perpendiculaires

Fig. 4.



sur BA, passant par les points obtenus, des longueurs $z \times \frac{c_1}{a_1}$ et $y \times \frac{b_1}{a_1}$, tandis que nous avons déjà la longueur $\frac{d_1}{a_1}$. Nous pouvons donc trouver sans peine

$$x = \frac{d_1}{a_1} + y \times \frac{b_1}{a_1} - z \times \frac{c_1}{a_1}.$$

Comme moyen de contrôle nous pouvons chercher x aussi dans l'une des deux autres parties de la *fig.* 1.

Il est évident que nous avons suivi totalement l'élimination algébrique par addition et soustraction.

Les figures et leurs parties sont placées l'une sous

l'autre de la même manière que dans la solution algébrique. Il va sans dire que les figures peuvent être placées autrement l'une par rapport à l'autre, par exemple de manière que les droites BA, CB, DC coïncident, à la condition que la clarté n'en souffre pas. Dans la *fig.* 1 les proportions $\frac{b_1}{a_1}, \dots$ ont été transportées sur une seule droite, de même pour $\frac{c_1}{a_1}, \dots$.

En plaçant la droite A′C′ comme les figures l'indiquent, nous pouvons déterminer directement r_1 et r_2. De même pour la position de A″B″, indiquée dans la *fig.* 3, nous avons trouvé la valeur de $\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1}$. Pour un système de n équations nous aurons n figures. Chacune des variables se trouvera dans la figure qui sert à l'élimination de cette variable.

Évidemment, il n'est pas nécessaire de faire

$$BE = CH = \dots = 1;$$

une longueur quelconque l suffira. Seulement dans la dernière figure, dans laquelle on trouve la première variable, nous sommes obligés de faire usage de l'unité.

La solution graphique peut rendre des services importants dans quelques problèmes techniques, tels que :

Le calcul des courants dans les diverses parties d'un réseau de distribution électrique;

Le calcul de la pression de la vapeur dans le récepteur d'une machine compound;

Le calcul des tensions dans les diverses parties d'une construction.

Il peut arriver que l'une ou l'autre des équations ne soit pas propre à être construite, par exemple, quand d_1, d_2 et d_3 sont très grandes par rapport à $a_1, \dots, b_1, \dots, c_1, \dots$.

Dans ce cas les équations doivent être changées d'une manière quelconque, par exemple en posant $x = mx_1$, $y = my_1$, $z = mz_1$, où m est une constante; une méthode générale ne peut pas être donnée.

La solution peut être beaucoup simplifiée, à l'aide d'une règle à glissière. Car alors nous pouvons facilement calculer $\frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{d_1}{a_1}, \ldots$ Plaçons ces valeurs à l'aide du compas sur des droites parallèles; nous pouvons mesurer $p_1, q_1, \ldots$, et calculer $\frac{q_1}{p_1}, \ldots, \frac{r_1}{p_1}, \ldots,$ qui peuvent être placées sur d'autres droites.

Alors z se trouve exprimé par $\left(\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1}\right) : \left(\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}\right)$, tandis que nous pouvons calculer avec la règle $z \times \frac{q_1}{p_1}$ pour trouver y, et $z \times \frac{c_1}{a_1}$, $y \times \frac{b_1}{a_1}$, pour obtenir x.

En ce cas la solution diffère de la solution algébrique, seulement en ce que l'on ne fait plus des additions ou des soustractions sur des nombres, mais que l'on fait exclusivement usage de la règle et du compas ; il en résulte que le calcul s'effectue plus vite et plus sommairement.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1898. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. A. VACQUANT,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur au lycée de Nancy.

On considère un triangle T *dont les sommets sont* A, B, C, *et une droite* Δ *dans son plan. On prend les*

symétriques d'un point O *quelconque de la droite* Δ *par rapport aux côtés du triangle* T, *et l'on construit le centre* O′ *du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus :*

I. *Trouver le lieu du point* O′ *lorsque le point* O *décrit la droite* Δ. *Ce lieu est une conique* S *dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite* Δ *par rapport au triangle* T. *On indiquera également les positions de* Δ *pour lesquelles* S *lui est tangente ;*

II. *Trouver le lieu du centre de la conique* S *lorsque la droite* Δ *se déplace parallèlement à elle-même.*

Ce lieu est une conique S_1 *qui dépend de la direction de* Δ;

III. *Trouver le lieu du centre de* S_1 *lorsqu'on fait varier la direction de* Δ;

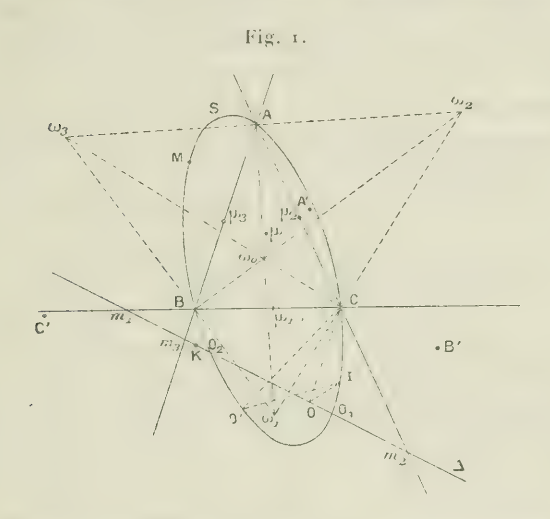
IV. *Démontrer que, par tout point* I *de* S, *on peut mener trois droites* OO′ *et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point* I *aux points de rencontre de* Δ *et de* S;

V. *Dans le cas particulier où la droite* Δ *passe par le centre* ω *d'un cercle inscrit au triangle* T, *on propose de trouver l'enveloppe de la droite* OO′. *Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle* T *et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés* Δ *et les côtés de* T *sont six points placés sur une même conique.*

I. Si l'on considère le point O comme un foyer d'une conique tangente aux trois côtés AB, BC, CA du triangle T, le centre O′ du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ ayant pour sommets les symétriques de

O par rapport aux côtés du triangle T est le deuxième foyer réel de cette conique. Soient ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle T. Les droites AO′, BO′, CO′ sont respectivement symé-

Fig. 1.



triques des droites AO, BO, CO par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle T, ou des angles extérieurs, et ces bissectrices se coupent deux à deux aux points ω. Le point O′ est donc l'*inverse* du point O, le triangle de référence étant ABC. (Consulter, par exemple, le *Traité de Géométrie*, de MM. Rouché et de Comberousse, Note III).

Le point O décrivant une droite Δ, son inverse O′ décrira une conique circonscrite au triangle ABC ; en effet, les faisceaux BO′ et CO′, homographiques des faisceaux BO et CO, sont homographiques ; donc le lieu de O′ est une conique S passant par B et C ; on voit de même qu'elle passe par A. Si Δ rencontre les côtés BC, CA, AB aux points m_1, m_2, m_3 les tangentes en A, B, C

à S sont les droites symétriques de Am_1, Bm_2, Cm_3 par rapport aux bissectrices $A\omega_0$, $B\omega_0$, $C\omega_0$.

Les points A′ et B′ étant les symétriques de O par rapport aux côtés CB, CA du triangle T, on a CO = CA′ = CB′, et la perpendiculaire élevée à A′B′ en son milieu passe par C; de même BO′ est perpendiculaire à A′C′ et A′O′ à B′C′; cette autre manière de construire le point O′ permet de voir aisément le genre de la conique S. Pour qu'un point O′ s'éloigne à l'infini, il faut que BO′ et CO′ soient parallèles, par suite A′, B′, C′ seront en ligne droite et le point O sera sur le cercle circonscrit au triangle T. Réciproquement, si O est sur le cercle circonscrit au triangle T, les points A′, B′, C′ sont en ligne droite; les rayons BO′ et CO′, perpendiculaires à A′C′ et A′B′, sont parallèles, et le point O′ est à l'infini. Donc, suivant que la droite Δ ne coupe pas, touche ou coupe le cercle circonscrit au triangle T, la conique S est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Il résulte de ce qui précède que l'inverse de la droite de l'infini est le cercle circonscrit au triangle T, ce qui est d'ailleurs facile à établir directement; de ce résultat on déduit immédiatement le genre de la conique S quand Δ se déplace.

Pour que la droite Δ soit tangente à S, il faut et il suffit qu'elle passe par l'un des points ω_0, ω_1, ω_2, ω_3. En effet, l'inverse O′ d'un point O de Δ est distinct de O si ce point O n'est pas l'un des points ω; cela résulte de la construction de O′; alors, si la droite Δ ne passe pas par un des points ω, elle rencontre la conique S en deux points O_1 et O_2, réels ou imaginaires, inverses l'un de l'autre et *distincts;* car l'inverse de O_1 qui appartient à la fois à Δ et à S appartient à la fois à S et à Δ, comme ce n'est pas O_1 c'est un autre point O_2 commun à S et Δ;

mais, si Δ passe par l'*un* des points ω, soit ω_1, l'inverse de ω_1 étant ω_1, le point ω_1 appartient à S; d'autre part, si la droite Δ rencontrait S en un autre point O_1 elle la rencontrerait encore au point O_2, inverse de O_1 et distinct de O_1, et par suite en trois points O_1, O_2, ω_1, ce qui est impossible; donc Δ est tangente à S en ω_1. Si la droite Δ passait par deux points ω, elle passerait par un des sommets du triangle T et serait à elle-même son inverse. Donc, pour que la conique S soit tangente à Δ, il faut et il suffit que Δ passe par un seul des points ω, qui est alors le point de contact de Δ et de S.

II. Quand la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même, elle passe par un point fixe P situé sur la droite de l'infini; son inverse, la conique S, passe par un point fixe M du cercle circonscrit à T; on a donc à chercher le lieu des centres des coniques S passant par quatre points fixes A, B, C, M. On sait que c'est une conique S_1 passant par le milieu de chacune des six droites obtenues en joignant les quatre points A, B, C, M deux à deux et par les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère ABCM; à ces neuf points on doit ajouter le centre μ du cercle circonscrit au triangle ABC, car ce cercle est une conique S particulière; c'est l'inverse de la droite de l'infini dont la direction est, comme on sait, indéterminée. Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les milieux de BC, CA, AB, la conique S_1 passe donc par les quatre points μ, μ_1, μ_2, μ_3 indépendants de la direction de Δ. Comme μ est l'orthocentre du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, toutes les coniques S_1 sont des hyperboles équilatères.

III. Quand la direction de Δ varie, le lieu des centres des coniques S_1, c'est-à-dire le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les quatre points μ,

μ_1, μ_2, μ_3 est, on vient de le rappeler, une conique qui est, dans le cas actuel, le cercle des neuf points du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, car les six points obtenus en prenant les milieux des droites joignant deux à deux les points μ, μ_1, μ_2, μ_3 appartiennent au lieu et sont sur le cercle des neuf points du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$.

IV. Soit K l'inverse de I; la droite IK est déjà une droite OO' passant par I; je remarque ensuite que les faisceaux IO, IO' sont homographiques, comme homographiques au faisceau CO; cela est évident pour le faisceau IO; quant au faisceau IO', il est homographique au faisceau CO', lequel est homographique au faisceau CO. Les faisceaux homographiques IO, IO' ont deux droites doubles qui sont deux droites OO' passant par I. On a ainsi trois droites OO' passant par I et il n'y en a pas davantage, car, pour une telle droite, ou O' coïncide avec I et alors O est en K, ou O' ne coïncide pas avec I et dans ce cas OO' est une droite double des faisceaux IO, IO'.

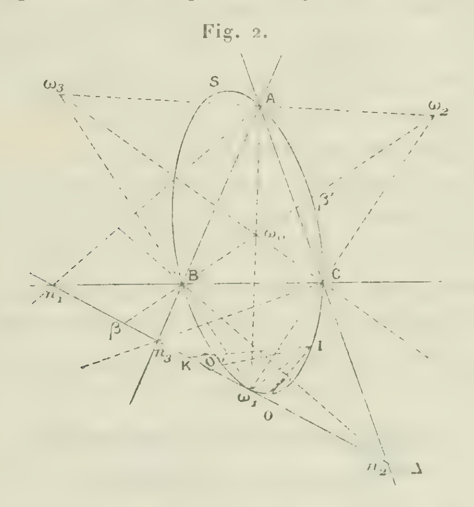
Les droites IO_1 et IO_2 sont deux rayons homologues des faisceaux homographiques IO, IO'; de plus IO_1, considéré comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces faisceaux, a toujours le même homologue IO_2; donc ces deux faisceaux sont en involution et les rayons homologues IO_1, IO_2 sont conjugués harmoniques par rapport aux deux rayons doubles qui sont deux droites OO'.

V. Il résulte de ce qui précède que, si la droite Δ est quelconque, l'enveloppe de OO' est une courbe de troisième classe pour laquelle Δ est une tangente double, car on obtient pour OO' la droite Δ quand O passe en O_1 ou O_2 en décrivant Δ. On aperçoit le même résultat en considérant la courbe polaire réciproque de l'en-

veloppe de OO′ par rapport à la conique S : c'est une cubique ayant un point double en δ, pôle de Δ, les tangentes au point double étant δO_1 et δO_2.

Maintenant, dans le cas particulier où Δ passe par l'un des points ω, ω_1 par exemple, alors IO_1 et IO_2

Fig. 2.



sont confondus suivant $I\omega_1$; les faisceaux en involution IO, IO′ ont un de leurs rayons doubles confondu avec $I\omega_1$; de sorte que toute droite passant par ω_1 est, dans le cas actuel, une tangente à l'enveloppe de OO′ qui se compose alors du point ω_1 et d'une conique φ; les deux tangentes à cette conique φ issues d'un point quelconque I de S sont IK et le deuxième rayon double des faisceaux IO, IO′. Cette conique φ passe en ω_1 et y admet pour tangente la droite Δ, comme on le voit aisément en faisant venir I en ω_1. Quelques positions remarquables de O sur Δ vont faire connaître des tangentes à la conique φ. Quand O est au point de rencontre de Δ avec la bissectrice $B\omega_0\omega_2$, le point O′ est sur cette bissectrice en son point de rencontre, autre que B, avec la

conique S, de sorte que la droite $B\omega_0\omega_2$ est tangente à la conique φ; il en est de même des droites $C\omega_0\omega_3$, $A\omega_2\omega_3$; mais les bissectrices $B\omega_1$, $C\omega_1$ ne sont pas tangentes à φ.

Soient n_1, n_2, n_3 les points de rencontre de Δ avec les côtés BC, CA, AB du triangle T. Quand O vient en n_1 le point O' vient en A; donc la diagonale An_1 du quadrilatère complet $BCn_2n_3n_1A$ est tangente à la conique φ; on voit de même que les deux autres diagonales Bn_2 et Cn_3 sont tangentes à φ.

Les côtés du triangle formé par les diagonales du quadrilatère complet $BCn_2n_3n_1A$ et ceux du triangle $\omega_0\omega_2\omega_3$ sont donc tangents à la conique φ, et l'on sait que, quand deux triangles sont circonscrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une conique.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Caen.

Éléments généraux de Mathématiques.

Épreuve écrite. — *Soit* C *la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \frac{2}{3}t^3;$$

montrer que C *est une hélice et déterminer la section droite du cylindre dont elle est une géodésique. Mon-*

trer que les développantes de C sont planes et construire celle qui part de C à l'origine des coordonnées.

On trouve que l'arc s compté à partir de l'origine est égal à $x+z$; C est une hélice : la section droite du cylindre, située dans le plan $x+z=0$ est définie par les relations

$$y = t^2, \qquad z_1 = \frac{2t^3-3t}{3\sqrt{2}};$$

pour la développante partant de l'origine, on a

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = \frac{t^2(2t^2-3)}{3+6t^2}, \qquad Z_1 = -\frac{4t^3\sqrt{2}}{3+6t^2}.$$

Épreuve pratique. — *On suppose que, dans l'orbite apparente du Soleil, on ait* $e=\frac{1}{60}$, $\varpi = 280°$, *et l'on considère la position S du Soleil* $\frac{1}{4}$ *d'année sidérale après son passage au périgée. Montrer que u est comprise entre* $\frac{\pi}{2}+e$ *et* $\frac{\pi}{2}+e-e^3$; *la valeur* $\frac{\pi}{2}+e$ *est approchée à moins de 1″ : en l'acceptant pour u, calculer la longitude de S.*

On a

$$u - e\sin u = \frac{\pi}{2}.$$

Soit

$$u = \frac{\pi}{2}+v; \qquad v = e\cos v = e\left(1-\frac{\theta v^2}{2}\right) = e\left(1-\frac{\theta' e^2}{2}\right),$$

et l'on achève aisément le calcul.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Soit $f(x,y,u)$ une fonction de trois variables dont on regarde la dernière u comme fonction des deux autres.*

Formant $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ *et regardant dans son expression* x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ *comme des variables indépendantes, on propose de déterminer* f *de sorte que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ *soit de la forme*

$$\varphi(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \varphi^2(x, y, u)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

On trouve

$$\varphi = \frac{1}{C - x - y - u},$$
$$f = F(x) + F_1(y) - \log(C - x - y - u).$$

II. *Une surface* S *a pour équation, en coordonnées rectangulaires,*

$$(ay + bz + c)x^2 + (a'y + b'z + c')(y^2 - 2mz) = 0,$$

m étant une constante donnée, a, b, c, a', b', c' six paramètres indéterminés. Former l'expression du rayon de courbure d'une section normale de S *en un point de la parabole* $x = 0$, $y^2 = 2mz$. *Déterminer* a, b, c, a', b', c' *de sorte que tous les points de la parabole soient des ombilics.*

La méthode ordinaire donne

$$\frac{1}{R} = \frac{m^2}{\sqrt{y^2 + m^2}}\,\frac{(by^2 + 2may + c)dx^2 + (b'y^2 + 2ma'y + c')dy^2}{(b'y^2 + 2ma'y + c')[m^2 dx^2 + (y^2 + m^2)dy^2]}.$$

Pour que tous les points de la parabole soient des ombilics, R doit être indépendant de $\frac{dy}{dx}$, quel que soit y. On trouve

$$a = b = a' = 0, \qquad b' = \frac{2c}{m}, \qquad c' = c.$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

qui se réduit à $y^{\frac{3}{2}}$ *pour* $x = 1$,

$$u = \frac{27}{8}(x-1)^3 + \frac{9}{4}(x-1)y + \frac{1}{8}[9(x-1)^2 + 4y]^{\frac{3}{2}}.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — I. *Un plan* P *glisse sur un plan fixe de manière qu'un de ses points* A *parcoure avec une vitesse constante une circonférence de centre* O *et de rayon* R, *tandis qu'un second point* A′ *du plan* P *demeure sur une circonférence de centre* O′ *et de rayon* R : *les droites* AA′, OO′ *ont une même longueur* 2R, *mais ne sont pas parallèles.*

Construire, pour une position quelconque du plan P, *le centre instantané de rotation et le centre des accélérations.*

On se rappellera que ce dernier est à la rencontre du cercle des inflexions et d'un cercle orthogonal qui passe par A, dont le $\frac{dv}{dt}$ est nul.

II. *Une plaque carrée homogène* OPQR, *soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner autour du sommet fixe* O : *le côté est égal à* 2, *la masse à* 3. *On considère trois axes liés à la plaque,* Ox *suivant la diagonale* OQ, Oy *parallèle à* PR, Oz *normal à la plaque. Déterminer le mouvement de cette plaque en supposant qu'à l'instant initial elle est animée d'une rotation instantanée dont les composantes sont* $p_0 = 2\alpha$, $q_0 = 0$, $r_0 = \alpha\sqrt{3}$.

On est dans le cas singulier où la distance du point fixe au plan de l'herpolhodie est égale au demi-axe moyen

de l'ellipsoïde d'inertie. Le problème est connu et j'écrirai seulement les deux formules

$$q = 2\alpha \operatorname{tang\,hyp} \alpha t\sqrt{3},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + 2\alpha t + \operatorname{arc\,tang} \frac{49(e^{2\alpha t\sqrt{3}} - 1)}{8\sqrt{3} + 94 - 98\,e^{2\alpha t\sqrt{3}}}.$$

Épreuve pratique. — *Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point intérieur ou extérieur, l'attraction étant réciproque à la quatrième puissance de la distance.*

Point intérieur : $\frac{2}{3}\,\frac{f\mathrm{M}x}{\mathrm{R}(\mathrm{R}^2 - x^2)^2}$;

Point extérieur : $-\frac{f\mathrm{M}(3\mathrm{R}^2 - x^2)}{3x^2(\mathrm{R}^2 - x^2)^2}$.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Plan tangent, lignes de courbure, lignes asymptotiques de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

Lieu des points de la surface pour lesquels le plan tangent est parallèle à une droite donnée.

Épreuve pratique. — *Équation générale des courbes qui coupent sous un angle donné les lemniscates définies par l'équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, dans laquelle a désigne un paramètre variable. Montrer que les courbes obtenues sont encore des lemniscates.*

Cas particulier des trajectoires orthogonales.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel pesant se meut sans frottement sur un cylindre parabolique*

dont l'équation par rapport à trois axes rectangulaires fixes est $y^2 - 2px = 0$.

On donne les cosinus directeurs α, β, γ *de la direction de la pesanteur, les coordonnées* x_0, y_0 *de la position initiale du point supposée dans le plan* xy *et les composantes* a, b, c *de la vitesse initiale.*

On discutera les circonstances générales du mouvement du point et en particulier de sa projection sur le plan xy, *on calculera la réaction du cylindre quand les données sont quelconques, et l'on considérera en particulier le cas où l'on aurait*

$$\beta = 0, \qquad a^2 + b^2 - 2g\alpha x_0 - g\alpha p = 0.$$

Épreuve pratique. — *Calculer les moments d'inertie d'un cylindre droit, homogène, de révolution : 1° Par rapport à une génératrice ; 2° Par rapport à un diamètre de sa base.*

Trouver quel doit être le rapport de la hauteur h *du cylindre au rayon* r *de sa base pour que les deux pendules composés obtenus en faisant osciller le cylindre autour d'une génératrice et d'un diamètre de sa base (ces deux axes étant supposés rendus horizontaux) aient même longueur de pendule simple synchrone.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Étant admis que la surface mathématique de la Terre est un ellipsoïde de révolution, on demande :*

1° *De calculer, pour un point de latitude* λ, *les rayons principaux de courbure de cet ellipsoïde ;*

2° *D'exprimer, en fonction des latitudes extrêmes, la longueur d'un arc de méridien. Application au*

quart du méridien, à l'arc de un *degré d'une latitude moyenne donnée, et, enfin, à la détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre à l'aide des longueurs de divers arcs de méridien.*

Épreuve pratique. — *Détermination de la déclinaison d'une étoile par la durée* T *de sa course au-dessus de l'horizon d'un lieu de latitude connue, calcul de l'azimut du lever de l'étoile.*

Variations de l'azimut et de la déclinaison correspondant à un accroissement θ *de* T.

Données numériques :

$$T = 9^h 40^m, \qquad \theta = 1^s, \qquad \lambda = 45^\circ 11' 12''.$$

ERRATA.

3e série, t. XVII, 1898. — Page 547 et Tables, page 586, ligne 13. *Lisez* comme il suit le titre de l'article :

Remarque sur l'application *à* la logique de la théorie des régions.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1722.

(1896, p. 152)

Par un foyer F *d'une conique donnée on mène une corde quelconque* MM'. *Le cercle de diamètre* MM' *rencontre la conique en deux autres points* M_1 *et* M'_1. *Montrer que :*

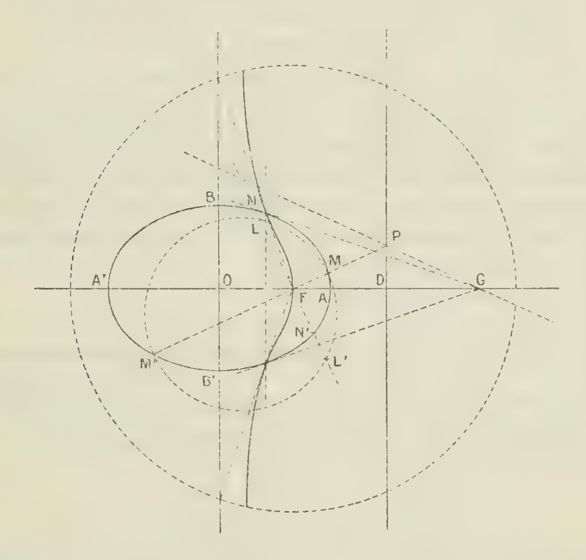
1° *La droite* $M_1M'_1$ *passe par un point fixe;*

2° *Le lieu des points de rencontre des sécantes communes au cercle et à la conique se compose d'une droite et d'une cubique.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. E. Malo.

Soient désignés par P, Q, R les trois points de rencontre des sécantes communes à la conique et au cercle $\widehat{MM'}$ prises deux à deux. Je dis que l'un d'eux, P, est le point où la corde focale MM' coupe la directrice.



En effet, les points P, Q, R sont caractérisés par cette propriété que chacun des trois côtés du triangle qu'ils forment est la polaire du sommet opposé à la fois par rapport au cercle $\widehat{MM'}$ et par rapport à la conique donnée. Or, la perpendiculaire menée à $\overline{MM'}$ en F est la polaire de P par rapport à la conique, en vertu de la définition même, en Géométrie, du foyer et de la directrice (foyer, point où chaque couple de droites conjuguées est rectangulaire; directrice, polaire du foyer), et aussi par rapport au cercle, d'après les propriétés

les plus élémentaires de cette courbe. La deuxième sécante commune au cercle $\widehat{MM'}$ et à la conique donnée dans le couple dont fait partie $\overline{MM'}$, est donc la droite passant par P et faisant avec les axes, en sens inverse, le même angle que $\overline{MM'}$: elle passe manifestement par le point G, symétrique de F par rapport à la directrice.

Les points Q et R sont, sur la perpendiculaire à $\overline{MM'}$ menée par F_1, les deux points conjugués à la fois au segment $\overline{NN'}$, intercepté par l'ellipse, et au segment LL', intercepté par le cercle. L'ordre de la courbe, lieu des points Q et R, est donc mesuré par le nombre 2 augmenté du nombre qui exprime combien de fois, dans le pivotement de la droite $\overline{LL'NN'}$ autour du point fixe F, l'un des points du couple (Q, R) vient en F. Or, quand cela a lieu, comme F est le milieu de $\overline{LL'}$ l'autre point de ce couple est à l'infini, et F est aussi le milieu du segment $\overline{NN'}$. La circonstance envisagée ne se présente donc qu'une seule fois, quand $\overline{LL'NN'}$ est perpendiculaire à l'axe focal, et, par suite. le lieu cherché est bien une cubique, avec un sommet en F et une asymptote perpendiculaire à l'axe focal de la conique donnée.

Il est, du reste, aisé d'en écrire l'équation. Soit ω l'angle que fait la droite $\overline{LL'NN'}$ avec l'axe focal, et, par conséquent, $\omega - \frac{\pi}{2}$ celui que fait, avec ce même axe, la droite $\overline{MM'}$: l'équation qui admet comme racines les longueurs des segments $\overline{FN}$, $\overline{FN'}$ est

$$\Phi(\rho) = (1 - e^2 \cos^2 \omega)\rho^2 + 2pe\rho \cos\omega - p^2 = 0 ;$$

semblablement l'équation qui détermine le couple de points (L, L') est

$$\Psi(\rho) = (1 - e^2 \sin^2 \omega)\rho^2 - p^2 = 0.$$

On aura, par suite, pour l'équation déterminant les points doubles de l'involution $\Phi(\rho) - k\Psi(\rho) = 0$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial p} - \frac{\partial\Phi}{\partial p}\frac{\partial\Psi}{\partial p} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho^2 \cos\omega(1 - e^2 \sin^2\omega) - pe\rho(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + p^2\cos\omega = 0,$$

et il suffit de multiplier par ρ pour passer immédiatement aux coordonnées rectangulaires

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + b^4)x - b^2c(x^2 + y^2) = 0.$$

L'asymptote, toujours réelle, passe donc par le centre de la conique. Les tangentes issues de F s'obtiennent en coupant l'axe non focal par le cercle décrit de F comme centre avec le rayon $2a$: les points de contact sont sur la conique et sur la polaire du point G.

Autre solution par M. AUDIBERT.

Question 1727.

1896, p. 200

Étant donnée une surface quelconque F, *pour laquelle l'indicatrice est* elliptique, *la surface* F', *lieu des centres de courbure de toutes les sections normales ou obliques que l'on peut faire autour de chacun de ses points, est représentée par l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R_1 R_2 (x^2 + y^2)}{R_2 x^2 + R_1 y^2} z,$$

R_1 *et* R_2 *étant les rayons principaux de* F *relatifs au point que l'on considère.*

Cela étant, vérifier que l'aire de la surface F' *et le volume qu'elle enveloppe ont respectivement pour expression*

$$A = \pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) \sqrt{R_1 R_2},$$

$$V = \frac{\pi}{48} (3 R_1^2 + 2 R_1 R_2 + 3 R_2^2) \sqrt{R_1 R_2}.$$

(A. ISSALY).

SOLUTION

Par M. G. TZITZÉICA.

1° Prenons pour axes les tangentes aux sections principales et la normale à la surface F au point O considéré, et considérons toutes les sections ayant la même tangente OT. En vertu du théorème de Meusnier, les centres de courbure de ces sections se trouvent sur un cercle de diamètre $O\omega$, ω étant le

centre de courbure de la section normale ZOT; le cercle précédent est situé dans un plan perpendiculaire à OT. La surface F′ est donc engendrée par cette circonférence, qui tourne autour de OZ et se dilate entre les centres principaux de courbure ω_1 et ω_2. Posons

$$\theta = \widehat{\mathrm{TO}x}.$$

Les équations du cercle $O\omega$ sont alors

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}z, \qquad \mathrm{R} = \mathrm{O}\omega, \\ y = x \tang\theta. \end{cases}$$

Or, d'après la relation d'Euler,

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{R}_1} + \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{R}_2}.$$

En éliminant R et θ entre (1) et (2), on trouve l'équation de l'énoncé pour la surface F′, qui devient une sphère si le point O est un ombilic de F.

2° Je prends pour élément d'aire l'aire limitée par deux positions infiniment voisines du cercle générateur. On a de la sorte

$$d\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2\frac{d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta+\mathrm{R}_1\sin^2\theta)^2},$$

d'où

$$\mathrm{A} = 2\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta+\mathrm{R}_1\sin^2\theta)^2};$$

donc

$$\mathrm{A} = \pi\left(\frac{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}{2}\right)\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}.$$

3° De même, en prenant pour élément de volume le volume correspondant à l'élément d'aire, on a

$$d\mathrm{V} = \frac{\mathrm{R}^2\,d\theta}{2}\,\frac{\mathrm{R}}{6} = \frac{1}{12}\mathrm{R}^3\,d\theta,$$

d'où

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{R}_1^3\mathrm{R}_2^3\,d\theta}{(\mathrm{R}_2\cos^2\theta+\mathrm{R}_1\sin^2\theta)^3};$$

donc

$$V = \frac{\pi}{48}(3R_1^2 - 2R_1R_2 + 3R_2^2)\sqrt{R_1R_2}.$$

Note. — Pour trouver les intégrales définies précédentes, on peut procéder de la manière suivante : Considérons l'intégrale immédiate

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{R_1R_2}}.$$

Prenant les dérivées de I par rapport à R_1 et R_2, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4R_1\sqrt{R_1R_2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4R_2\sqrt{R_1R_2}}.$$

En faisant la somme, on obtient

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)} = \frac{\pi(R_1 + R_2)}{4R_1R_2\sqrt{R_1R_2}}.$$

En procédant de la même manière, on obtient de I_2 l'intégrale I_3. On pourrait trouver de la sorte une formule générale, pour

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(R_2\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta)^n}.$$

Question 1729.

(1896, p. 248.)

L'équation $xyz + kw^3 = 0$, où x, y, z représentent les coordonnées homogènes d'un point du plan

$$w = ax + by + cz,$$

et k un paramètre arbitraire, représente un système de cubiques qui ont trois points d'inflexion réels situés sur la

droite w ; le lieu des autres points d'inflexion se compose de deux droites imaginaires A *et* B.

Démontrer qu'il existe deux cubiques du système, tangentes à une droite donnée L, *et que les deux points de contact sont conjugués harmoniques relativement aux deux points imaginaires conjugués où la droite* L *rencontre* A *et* B. (A. Legoux.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzéica.

1° La hessienne de la cubique a pour équation

$$3kw(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2ab\,xz) - xyz = 0.$$

D'où résulte que trois des points d'inflexion sont sur la droite w, ce qui était d'ailleurs visible sur l'équation de la cubique même. Si l'on élimine k entre l'équation précédente et celle de la cubique, on trouve pour le lieu des autres points d'inflexion

$$(1) \qquad (ax - by)^2 + (by - cz)^2 + (cz - ax)^2 = 0$$

deux droites imaginaires qui se rencontrent dans le point réel $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

2° L'équation du faisceau de droites qui joignent l'origine aux points d'intersection de la cubique avec la droite L

$$ux + vy = z$$

est

$$(2) \qquad xy(ux + vy) + kt^3 = 0,$$

où

$$t \equiv (a + cu)x + (b + cv)y.$$

Pour que la cubique soit tangente à L il faut que (2) admette un facteur carré. Ce facteur carré est d'ailleurs un facteur du jacobien des deux fonctions de x et y,

$$xy(ux + vy) \quad \text{et} \quad t^3.$$

Ce jacobien a pour équation

$$t^2[(a + cu)ux^2 + 2(av - bu)xy - (b + cv)vy^2] = 0;$$

il comprend le facteur singulier t^2 qui représente la droite qui joint l'origine au point d'intersection de ϖ et de L. Il reste alors pour l'équation des droites qui joignent l'origine aux deux points de contact

$$(3)\qquad (a+cu)ux^2+2(av-bu)xy-(b+cv)vy^2=0.$$

D'ailleurs, l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection des droites A et B avec L est

$$(4)\qquad \begin{cases}(a^2+c^2u^2-acu)x^2-(ab+bcu+acv-2c^2uv)xy\\ \qquad\qquad -(b^2+c^2v^2-bcv)y^2=0.\end{cases}$$

Il reste à voir que les deux faisceaux (3) et (4) sont conjugués harmoniques l'un par rapport à l'autre, ce qu'on vérifie aisément.

Autre solution de M. AUDIBERT.

QUESTIONS.

480 (**1859**, 266). Soit D_0 un cercle, D_1 une développante de D_0, D_2 une développante de D_1, ..., D_n une développante de D_{n-1}. Appelons D_n *développante du cercle de l'ordre n*. Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant : *Si une figure plane varie en restant semblable à elle-même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n, toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre.* (P. DE LAFITTE.)

495 (**1859**, 144). Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P et Q les points d'intersection de cette polaire avec la conique, le lieu du point d'intersection de deux normales menées en P et Q à la conique ne dépasse pas $3n$.

(DESBOVES.)

496 (**1859**, 144). Par un point pris arbitrairement dans l'es-

pace, on peut, en général, mener $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ droites, dont chacune rencontre en deux points la ligne à double courbure résultant de l'intersection de deux surfaces algébriques d'ordre m et p; toutes ces droites sont sur un cône d'ordre $(m-1)(p-1)$.

Il suit de là que la perspective de l'intersection de deux surfaces d'ordre m et p a $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ points doubles situés sur une courbe d'ordre $(m-1)(p-1)$.

(MOUTARD.)

512 (**1860**, 46). Lorsqu'un corps peut tourner autour de six axes *indépendants*, on peut le faire tourner autour d'un axe quelconque. (MÖBIUS.)

513 (**1860**, 46). Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que *six*, il est toujours possible de trouver des forces qui, agissant suivant ces droites, se fassent équilibre; lorsque le nombre de droites est moindre, cette possibilité exige encore certaines conditions. (MÖBIUS.)

1812. Les plans osculateurs à une cubique gauche en trois de ses points, a, b et c, coupent le plan abc suivant des droites concourantes. (E. DUPORCQ.)

1813. Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 les pieds de quatre normales concourantes menées à une conique C :

1° Dans chacun des triangles T, tels que $a_2a_3a_4$, on peut inscrire une conique A ayant les mêmes axes de symétrie que C;

2° Les quatre coniques A_1, A_2, A_3 et A_4 sont circonscrites à un même quadrilatère;

3° Les cercles circonscrits aux triangles admettant pour sommets les points de contact des coniques A avec les côtés des triangles T passent par un même point (E. DUPORCQ.)

1814. On considère trois coniques (S), (S_1), (S_2) bitangentes entre elles aux deux points A, B; de deux points a, a_1 pris sur (S), (S_1) et tels que la droite aa_1 passe par ce pôle commun à ces trois coniques, on mène des tangentes à (S_2). Les quatre sommets du quadrilatère ainsi formés décrivent deux coniques. (G. LEINEKUGEL.)

[P1] [P2]

SUR L'HOMOGRAPHIE ET LA DUALITÉ APPLIQUÉES AUX PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU PLAN;

Par M. L. RIPERT.

Préliminaires.

1. Lorsque l'on a donné, en Géométrie élémentaire, les définitions des éléments métriques, dont les deux principales, celles de la *distance de deux points* et de l'*angle de deux droites* remontent à l'antiquité, il est clair que l'on ne pouvait pas se préoccuper de l'application des principes de dualité et d'homographie. Pour pouvoir appliquer ces principes, il ne faut donc pas craindre de revenir en arrière, d'analyser les définitions données, d'examiner comment l'on pourrait, sans changer leur signification, les transformer de manière qu'elles donnent prise à l'application successive des deux principes.

Chasles, dans ses Mémoires annexés à l'*Aperçu historique,* a défini le principe d'homographie comme résultant de deux applications du principe de dualité. C'est en effet le moyen le plus simple de *démonstration.* Mais l'ordre d'*application,* naturel et logique, est : 1° la transformation *sans changement de nom* des propriétés, c'est-à-dire l'homographie; 2° la transformation *avec changement de nom* des propriétés, c'est-à-dire la dualité. Il paraît très difficile, en général, d'appliquer *directement* le principe de dualité aux propriétés métriques. Je me propose de prouver que cette application est

toujours possible et même facile quand les propriétés ont été préalablement généralisées par homographie.

2. J'admets comme acquis et hors de contestation : 1° les principes eux-mêmes et la généralité de leur application aux propriétés *projectives*, d'où il suit que le problème de l'application aux propriétés *métriques* revient à donner à ces propriétés le *caractère projectif;* 2° le double et fondamental théorème de Chasles : *Dans deux figures homologues ou corrélatives, les rapports anharmoniques d'éléments homologues ou corrélatifs sont égaux;* 3° l'existence symbolique, dans le plan, d'une droite i de l'infini, qui se trouve déterminée par les deux points imaginaires I_1 et I_2, dits *points cycliques,* lesquels déterminent eux-mêmes la famille des *cercles* du plan (caractérisée par leur passage par I_1, I_2); 4° la possibilité homographique de substituer, à cette droite i ou $I_1 I_2$, une droite quelconque n, déterminée par deux points fixes arbitrairement choisis (réels ou imaginaires, r ou i) N_1, N_2, qui déterminent eux-mêmes toute une famille de coniques pour lesquelles, dans un précédent article (*N. A.*, p. 446; 1898), j'ai proposé le nom d'*homoponctuelles* (c'est-à-dire astreintes à passer toutes par N_1, N_2); 5° la corrélation de la droite n ou $N_1 N_2$ (dont i ou $I_1 I_2$ est un cas particulier) avec un point N, arbitrairement choisi, déterminé par deux droites fixes données (r ou i) n_1, n_2, lesquelles déterminent elles-mêmes toute une famille de coniques *homotangentes* (c'est-à dire astreintes toutes à toucher n_1, n_2).

Un cercle est déterminé si l'on donne son centre (pôle de i) et un point, ou encore trois points. De même, une conique *homoponctuelle* est déterminée par la donnée du pôle de n et d'un point, ou encore de trois points. Une conique *homotangente* est déterminée si

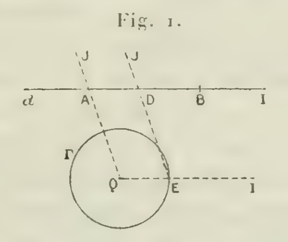
l'on donne la polaire de N et une tangente, ou encore trois tangentes. La droite n sera dite *droite fondamentale* dans les transformations homographiques, et le point N *point fondamental* dans les transformations dualistiques.

Distance anharmonique de deux points.

3. La *distance* (métrique) de deux points A et B est (ou s'exprime par) le nombre d'unités de longueur contenues dans le segment AB. Cette définition implique ce qui suit :

Étant donnée (*fig.* 1) une droite d qui rencontre i en un point I et sur laquelle on prend deux points A et B,

Fig. 1.



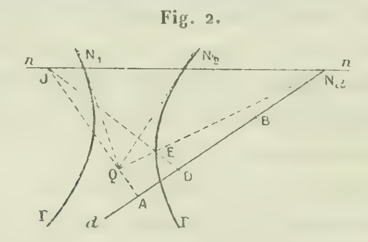
on considère, dans la famille des cercles (I_1, I_2) du plan, un cercle Γ, qui sera dit *cercle-unité*, ayant pour pôle de i un point arbitraire Q et d'un rayon égal à l'unité de longueur arbitrairement choisie [1] On mène QI qui rencontre Γ en E, QA qui rencontre i en J, et JE qui rencontre d en D. Le rapport $\frac{AB}{AD}$, c'est-à-dire le rapport

(1) Le *cercle-unité* est indispensable pour déterminer la *direction* et le *sens* des segments. A chaque diamètre EQE′ correspond une direction avec ses deux sens (QE, QE′). D'où résulte, pour les définitions (4 et 7) la nécessité des *coniques-unités* (homoponctuelle ou homotangente).

anharmonique $\frac{AB.DI}{AD.BI} = (ABDI)$, est la *distance* des deux points A et B, ou *longueur* du segment AB (les mots : par rapport à i et au cercle-unité Γ, étant sous-entendus).

4. Par généralisation, étant donnée (*fig.* 2) une droite d sur laquelle on prend deux points A et B, et qui rencontre la droite fondamentale n en un point N_d, on considère, dans la famille de coniques homoponctuelles

Fig. 2.



(N_1, N_2), une conique Γ, qui sera dite *conique-unité*, ayant pour pôle de n un point arbitraire Q et d'amplitude arbitrairement choisie. On mène QN_d qui rencontre Γ en E, QA qui rencontre n en J, et JE qui rencontre d en D. Le rapport anharmonique

$$\frac{AB.DN_d}{AD.BN_d} = (ABDN_d)$$

sera dit la *distance anharmonique* des deux points A et B, ou la *longueur anharmonique* du segment AB (les mots : par rapport à la droite fondamentale n et à la conique-unité Γ étant sous-entendus).

5. *Remarque.* — Les *fig.* 1 et 2 peuvent être faites d'une manière indépendante; mais, si elles sont homologues, en vertu du théorème de Chasles (2, 2°), le rap-

port (ABDI) de la *fig.* 1 est égal au rapport ($ABDN_d$) de la *fig.* 2. Il en sera de même pour deux rapports homologues quelconques. Donc, *toute relation entre des longueurs, exprimant une propriété métrique de la fig.* 1, *subsistera entre les longueurs anharmoniques homologues de la fig.* 2 *et exprimera la propriété anharmonique homologue de cette seconde figure.*

6. *Applications.* — 1° Un cercle de centre O (pôle de i) est le lieu des points M tels que la longueur OM soit constante. Donc, une conique *homoponctuelle,* ayant O pour pôle de n, est le lieu des points M tels que la longueur anharmonique OM soit constante. Cette constante sera dite le *rayon anharmonique* de la conique homoponctuelle.

2° Une conique *non cercle* C est le lieu des points M tels que la somme ou différence de leurs distances à deux points fixes F et F′, dits *foyers,* soit égale à la longueur $2a$ de l'*axe focal* (c'est-à-dire du diamètre SS′ déterminé par F, F′). Le centre O (pôle de i) est le conjugué harmonique du point K à l'infini sur cette droite, soit par rapport au couple (F, F′), soit par rapport au couple (S, S′). En désignant par R et R′ les extrémités de l'axe non focal, qui coupe i en un point L, pôle conjugué de K par rapport au cercle-unité Γ, on a

$$OS = OS' = a, \qquad OR = OR' = b, \qquad OF = OF' = c,$$

avec $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F′ par rapport à C sont les *directrices,* etc.

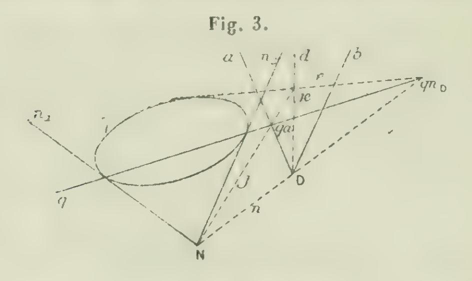
Donc, une conique *non-homoponctuelle* C est le lieu des points M tels que la somme ou différence de leurs distances anharmoniques à deux points fixes F et F′ qui seront dits *foyers* (par rapport à n), soit égale à la longueur anharmonique $2a$ de la *corde focale* (par rapport

à n) SS', déterminée par F et F'. Le pôle O de n est le conjugué harmonique du point K d'intersection de n avec cette droite, soit par rapport au couple (F, F'), soit par rapport au couple (S, S'). En désignant par R et R' les extrémités de la corde conjuguée de SS', c'est-à-dire passant par O et le point L de n qui est pôle conjugué de K par rapport à la conique-unité Γ, les longueurs *anharmoniques* OS et OS' ou a, OR et OR' ou b, OF et OF' ou c, sont respectivement égales, et l'on a, entre elles, la relation $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F' par rapport à C seront dites les *directrices correspondantes* (par rapport à n), etc.

Angle anharmonique de deux droites.

7. Étant donné un point D, intersection de deux droites a et b (*fig.* 3), et dont la jonction au point fon-

Fig. 3.



damental N est la droite n_D, on considère, dans la famille de coniques homotangentes (n_1, n_2) une conique arbitrairement choisie γ, ayant q pour polaire de N, et qui sera dite *conique-unité*. Soit e une tangente à cette conique menée par le point qn_D. On joint les points qa et N par la droite j, qui coupe e en je, et l'on joint je à D par la droite d. Le rapport anharmonique ($abdn_D$) [1]

[1] On sait que le rapport anharmonique ($abdn$) s'exprime, indé-

sera dit l'*angle anharmonique* des deux droites a et b (les mots : par rapport à N et à γ étant sous-entendus).

8. *Remarques.* — 1° Il importe d'observer ici que, tandis que la distance (ou longueur) anharmonique admet, comme cas particulier (3, 4) la distance (ou longueur) métrique, il n'en est pas de même de l'angle anharmonique, comparé à l'angle métrique *exprimé en degrés et subdivisions de degrés.* Cette question mérite quelques développements, que, pour ne pas interrompre l'exposé actuel, je renvoie à une Note à la fin de cet article. Dans ce qui suit, il sera exclusivement question de l'angle *anharmonique* tel qu'il vient d'être défini.

2° Si la *fig.* 3 est la corrélative de la *fig.* 2, on a $(\mathrm{ABDN}_d) = (abdn_{\mathrm{D}})$. Donc, *toute relation entre des longueurs anharmoniques, exprimant une propriété anharmonique de la fig.* 2, *subsistera entre les angles anharmoniques corrélatifs de la fig.* 3 *et exprimera la propriété anharmonique corrélative de cette dernière figure.*

3° Par le point qn_{D}, on peut mener à γ deux tangentes e et e', d'où résultent deux droites d et d'. Mais, de même (3 et 4), QI ou QN_d coupaient Γ en deux points E et E', d'où résultaient deux points D et D'. Les rapports anharmoniques (ABDI) et (ABD'I), (ABDN_d) et $(\mathrm{ABD'N}_d)$, $(abdn_{\mathrm{D}})$ et $(abd'n_{\mathrm{D}})$ sont respectivement égaux et de signes contraires. Il ne peut y avoir aucune difficulté dans les dualisations en faisant toujours correspondre les rapports anharmoniques de mêmes signes.

9. *Applications.* — 1° Une conique *homotangente*

---

pendamment de la considération de toute sécante, par la fonction $\dfrac{\sin(a, b).\sin(d, n)}{\sin(a, d).\sin(b, n)}$.

ayant o pour polaire de N est l'enveloppe des droites m telles que l'angle anharmonique (o, m) soit constant. Cette constante sera dite l'*angle anharmonique* de la conique homotangente.

2° Une conique *non-homotangente* c est l'enveloppe des droites m telles que la somme ou la différence de leurs angles anharmoniques avec deux droites fixes f et f' qui seront dites *focales* (par rapport à N) soit égale à l'angle anharmonique $2A$ des tangentes s, s' menées à c du point d'intersection de f et f'. La polaire o de N est la conjuguée harmonique de la droite k de jonction de N au *point focal* $ss'ff'$, soit par rapport à (f, f') soit par rapport à (s, s'). En désignant par r et r' les tangentes menées à c du point d'intersection de o avec la droite l passant par N et qui est polaire conjuguée de k par rapport à la conique-unité γ, les angles anharmoniques (o, s) et (o, s') ou A, (o, r) et (o, r') ou B, (o, f) et (o, f') ou C sont respectivement égaux, et l'on a entre eux la relation $A^2 \mp B^2 = C^2$. Les pôles de f et f' par rapport à C seront dits les *points directeurs correspondants* (par rapport à N), etc.

Distance anharmonique d'un point à une droite.

10. La *distance* (métrique) d'un point A à une droite d est celle de A à l'intersection de d avec la droite qui joint A au point de i qui est le conjugué harmonique du point commun à i et à d par rapport au couple (I_1, I_2).

11. La *distance anharmonique* (par rapport à n, N_1, N_2) d'un point A à une droite d sera donc celle (4) du point A à l'intersection de d avec la droite qui joint A au point de n, conjugué harmonique du point commun à n et d par rapport au couple (N_1, N_2).

12. *Applications.* — 1° Un cercle étant l'enveloppe des droites dont la distance à un point fixe (pôle de i) est constante, une conique *homoponctuelle* est l'enveloppe des droites dont la distance anharmonique à un point fixe (pôle de n) est constante.

2° Une conique *non-cercle* C est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe F (foyer) et à une droite fixe d (directrice) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique est tangente à i en un point déterminé J (pôle de i); elle n'a pas d'autre foyer et directrice possible que F et d; elle est dite *parabole* et celui de ses diamètres qui passe par F est l'*axe*.

Une conique *non-homoponctuelle* C est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances anharmoniques à un point F (foyer par rapport à n) et à une droite d (directrice par rapport à n) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique est tangente à n en un point N (pôle de n) Elle n'a pas, *par rapport à n*, d'autres foyer et directrice que F et d; elle sera dite, dans ce cas, *parabole par rapport à n*, la droite NF étant l'*axe* (par rapport à n). (Voir *Mathesis,* 1898, p. 251.)

Angle anharmonique d'une droite et d'un point.

13. L'*angle anharmonique* (par rapport à N, n_1, n_2) d'une droite a et d'un point D est celui (7) de la droite a avec la jonction de D au point d'intersection de a et de la droite passant par N et conjuguée harmonique, par rapport à (n_1, n_2), de la jonction de N et D.

14. *Applications.* — 1° Une conique *homotangente* est le lieu des points dont l'angle anharmonique avec une droite fixe (polaire de N) est constant.

2° Une conique *non homotangente* c est l'enveloppe des droites telles que le rapport de leurs angles anharmoniques avec une droite f (focale par rapport à N) et un point D (directeur par rapport à N) soit constant. Si le rapport est égal à l'unité, la conique passe par N, la polaire de ce point étant la tangente n. Elle n'a pas, *par rapport à* N, d'autre focale et directeur que f et D; elle sera dite, dans ce cas, *parabole par rapport à* N, le point nf étant l'*axial* (par rapport à N). (*Mathesis, loc. cit.*)

Division anharmonique des segments et des angles.

15. Soit un segment AB d'une droite d dont le point à l'infini est I. On prend, de part et d'autre de A :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{M'A} = \frac{\mathrm{AB}}{k},$$

le point M étant entre A et B, c'est-à-dire dans la région de d qui ne contient pas I. En prenant, dans cette région, AD = 1, on a

$$\frac{\mathrm{AM.DI}}{\mathrm{AD.MI}} = -\frac{\mathrm{AM'.DI}}{\mathrm{AD.M'I}} = \frac{1}{k}.\frac{\mathrm{AB.DI}}{\mathrm{AD.BI}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{AB.MI}}{\mathrm{AM.BI}} = k, \qquad \frac{\mathrm{AB.M'I}}{\mathrm{AM'.BI}} = -k.$$

16. Par suite, après remplacement de i par n : Un segment AM d'une droite d, qui coupe n en N_d, sera dit le $k^{ième}$ *anharmonique* du segment AB de d si l'on a $(\mathrm{ABMN}_d) = \pm k$. Le signe + correspond au point M *intérieur par rapport à* n, c'est-à-dire situé dans la région de d où ne se trouve pas le point N_d. Le signe — correspond au point M *extérieur par rapport à* n, c'est-à-dire situé dans la même région de d

que N_d. Le point M_1, défini par $(ABM_1N_d) = 1$, sera dit le *milieu anharmonique* du segment AB.

17. Corrélativement, N étant le point fondamental : Un angle (a, m) de sommet D sera dit le $k^{\text{ième}}$ *anharmonique* de l'angle (a, b) de même sommet si l'on a

$$(abmn_D) = \pm k,$$

n_D étant la droite de jonction de D et N. Le signe + correspond à la droite m située dans la région de (a, b) où ne se trouve pas n_D; le signe — à la droite m située dans la même région de (a, b) que n_D. La droite m_1 définie par $(abm_1n_D) = 1$, sera dite la *médiane anharmonique* du couple (a, b).

18. *Applications.* — Les droites menées des sommets d'un triangle aux milieux anharmoniques des côtés opposés concourent en un même point, divisant anharmoniquement le segment compris entre le sommet et le côté dans le rapport de 2 à 1; ce point sera dit le *centre anharmonique* du triangle. *Corrélativement,* les points d'intersection des côtés d'un triangle avec les médianes anharmoniques des couples opposés sont sur une même droite, divisant anharmoniquement l'angle du côté avec le sommet dans le rapport de 2 à 1. Cette droite sera dite l'*axe anharmonique* du triangle.

Conjugués et conjuguées anharmoniques.

19. Sur une droite d dont le point à l'infini est I, le conjugué harmonique d'un point O par rapport aux m points $M_1, M_2, \ldots, M_m$ est le point M défini par

$$\frac{m}{\overline{OM}} = \sum_1^m \frac{1}{\overline{OM_1}} \qquad \text{ou} \qquad m\frac{\overline{MI}}{\overline{OM}} = \sum_1^m \frac{\overline{M_1I}}{\overline{OM_1}}.$$

De même, sur la droite d que coupe n en N_d, le *conjugué anharmonique* (ou par rapport à n) d'un point O par rapport avec m points $M_1, M_2, \ldots, M_m$ sera le point M défini par la relation

$$m\frac{MN_d}{OM} = \sum_1^m \frac{M_1 N_d}{OM_1}.$$

Corrélativement, autour du point D, dont la jonction au point fondamental N est n_D, la *conjuguée anharmonique* (ou par rapport à N) d'une droite o par rapport aux M droites $m_1, m_2, \ldots, m_M$ sera la droite m définie par la relation

$$M\frac{\sin(m, n_D)}{\sin(o, m)} = \sum_1^M \frac{\sin(m_1, n_D)}{\sin(o, m_1)}.$$

20. *Applications.* — Le théorème de la polaire rectiligne de Cotes, qui est déjà une généralisation de celui du diamètre de Newton, est un cas particulier du suivant : *Le lieu des conjuguées anharmoniques d'un point* O *par rapport aux* m *points d'intersection d'une courbe d'ordre* m *par des sécantes issues de* O *est une droite.* Le théorème corrélatif est : *L'enveloppe des conjuguées anharmoniques d'une droite* o *par rapport aux* M *tangentes menées d'un point de* o *à une courbe de classe* M *est un point.*

21. *Remarque.* — On voit aisément que, pour des segments en ligne droite ayant même point-origine O, ou pour des droites concourantes dont l'origine des inclinaisons est la même droite o, les rapports $\frac{OM}{MN_d}$ et $\frac{\sin(o, m)}{\sin(m, n_D)}$ représentent respectivement, à un facteur constant près, la longueur anharmonique OM ou l'angle anharmonique (o, m). Ceci posé, le théorème des trans-

versales de Newton est un cas particulier du suivant : *Le rapport des produits des distances anharmoniques du point commun variable* O *de deux droites* OA, OB, *qui passent par les points fixes* A *et* B *aux m points d'intersection de ces droites avec une courbe d'ordre m est constant.* Le théorème corrélatif est : *Le rapport des produits des angles anharmoniques de la jonction variable o de deux points oa et ob, situés sur des droites fixes a et b, avec les* M *tangentes menées de ces points à une courbe de classe* M *est constant.* Il est facile de passer de là à la généralisation et à la dualisation du théorème de Carnot.

Éléments anharmoniques des angles et des segments.

22. Le *cosinus* (métrique) de l'angle D formé par les droites a et b est le rapport $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DA}} = (\mathrm{DEAI})$, obtenu en décrivant de D un cercle Γ coupant a en A et b en B, et abaissant de B sur DA (dont le point à l'infini est I) la perpendiculaire BE. En d'autres termes, le cosinus de (a, b) est la longueur du segment DE, par rapport à Γ, dont le rayon est l'unité. La longueur du segment BE est dite le *sinus* de (a, b). La *tangente* est le rapport du sinus au cosinus, etc.

Par généralisation, j'appellerai *cosinus anharmonique* (par rapport à n) du couple de droites (a, b) de sommet D, le rapport anharmonique (DEAK) obtenu en décrivant une conique homoponctuelle Γ, ayant D pour pôle de n, coupant a en A et b en B, puis joignant B au point L de n qui est pôle conjugué par rapport à Γ du point K d'intersection de a et n, prenant enfin le point E d'intersection de BL et DA. En d'autres termes, le cosinus anharmonique de (a, b) est la longueur anhar-

monique du segment DE, par rapport à Γ dont le rayon anharmonique est l'unité. La longueur anharmonique du segment BE sera dite le *sinus anharmonique* de (a, b); le rapport du sinus au cosinus sera la *tangente anharmonique* de (a, b), etc.

23. Mais il est visible que ces définitions ont des corrélatives.

J'appellerai *quasi-cosinus anharmonique* d'un segment AB d'une droite d l'angle anharmonique (d, e) obtenu en décrivant une conique homotangente γ, ayant d pour polaire du point fondamental N, dont l'angle anharmonique (9) est égal à celui de la conique-unité, et à laquelle les tangentes menées de A et B sont a et b, puis, coupant b par une droite l passant par N et polaire conjuguée par rapport à γ de la droite k de jonction de A à N, menant enfin la jonction e de bl et da. L'angle anharmonique (b, e) sera dit le *quasi-sinus anharmonique* du segment AB; leur rapport sera la *quasi-tangente anharmonique* de AB, etc. Je représenterai ces éléments dans les formules par les abréviations *qu cos*, *qu sin*, *qu tg*, etc.

24. *Applications.* — Dans tout triangle ABC, *considéré par rapport à une droite n*, on a, entre les longueurs anharmoniques a, b, c des côtés et les *lignes* des couples (b, c) ou A, (c, a) ou B, (a, b) ou C, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc \cos A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca \cos B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab \cos C} = 2, \qquad \dots$$

Dans tout triangle (a, b, c), *considéré par rapport à un point* N, on a, entre les angles anharmoniques A, B, C

et les *quasi-lignes* des segments BC ou a, CA ou b, AB ou c, les relations

$$\frac{A}{\text{qu}\sin a}=\frac{B}{\text{qu}\sin b}=\frac{C}{\text{qu}\sin c},$$

$$\frac{B^2+C^2-A^2}{BC\,\text{qu}\cos a}=\frac{C^2+A^2-B^2}{CA\,\text{qu}\cos b}=\frac{A^2-B^2-C^2}{AB\,\text{qu}\cos c}=2. \quad \ldots.$$

Bissectrices et bissecteurs anharmoniques.

25. Les *bissectrices* (métriques) d'un couple (b, c) de sommet A sont deux droites passant par A, conjuguées harmoniques par rapport à (b, c) et diamètres conjugués d'un cercle de centre A. Dans un triangle ABC, la bissectrice *intérieure* de A est celle qui coupe BC dans la région où ne se trouve pas le point à l'infini de BC; l'autre est la bissectrice *extérieure*.

Les *bissectrices anharmoniques* (ou par rapport à n) d'un couple (b, c) de sommet A seront deux droites passant par A, conjuguées harmoniques par rapport à (b, c) et polaires conjuguées par rapport à une conique homoponctuelle (N_1, N_2) ayant A pour polaire de n. Dans un triangle ABC, la bissectrice anharmonique *intérieure* de A sera celle qui coupe BC dans la région où ne se trouve pas son point sur n; l'autre sera la bissectrice anharmonique *extérieure*.

26. Les *bissecteurs anharmoniques* (ou par rapport à N) d'un couple (B, C) des points de la droite a seront deux points de cette droite, conjugués harmoniques par rapport à (B, C) et pôles conjugués par rapport à une conique homotangente (n_1, n_2) ayant a pour polaire de N. Dans un triangle (a, b, c), le bissecteur anharmonique *intérieur* de a sera celui dont la jonction à A est dans la région où ne se trouve pas la droite AN; l'autre sera le bissecteur anharmonique *extérieur*.

27. *Applications.* — 1° Les trois bissectrices anharmoniques *intérieures* d'un triangle se coupent en un même point I, pôle de n par rapport à une conique homoponctuelle tangente aux trois côtés et qui sera dite *inscrite*; deux bissectrices anharmoniques *extérieures* et une bissectrice *intérieure* se coupent en un même point (I_a, I_b ou I_c), pôle de n par rapport à une conique homoponctuelle tangente aux trois côtés et qui sera dite *ex-inscrite*. Corrélativement, les trois bissecteurs anharmoniques *intérieurs* d'un triangle sont sur une droite i, polaire de N par rapport à une conique homotangente passant par les trois sommets et qui sera dite *circonscrite*; deux bissecteurs anharmoniques *extérieurs* et un bissecteur anharmonique *intérieur* sont sur une droite (i_A, i_B ou i_C), polaire de N par rapport à une conique homotangente passant par les trois sommets et qui sera dite *ex-circonscrite*.

2° G étant le centre anharmonique du triangle (18), les trois droites AL_a, BL_b, CL_c, telles que AI, BI, CI soient les bissectrices anharmoniques intérieures de $\widehat{L_a AG}$, $\widehat{L_b BG}$, $\widehat{L_c CG}$, concourent en un même point L, que j'appellerai *point Lemoinien* (par rapport à n). Corrélativement, g étant (18) l'axe anharmonique du triangle, les trois points al_A, bl_B, cl_C, tels que ai, bi, ci soient les bissecteurs anharmoniques intérieurs de $\overline{l_A ag}$, $\overline{l_B bg}$, $\overline{l_C cg}$, sont sur une droite l, que j'appellerai la *droite Longchampsienne* (par rapport à N), etc.

28. *Remarque.* — De même que $\widehat{LAG}$ représente l'angle de sommet A dont les côtés sont LA et AG, $\overline{lag}$ représente le segment dont le support est a et dont les extrémités sont la et ag.

Aires, périmètre et périangle anharmoniques.

29. L'aire d'un triangle est le produit de la base par la moitié de la hauteur.

L'*aire anharmonique* S (*par rapport à n*) d'un triangle sera le produit de la longueur anharmonique d'un côté par la moitié de la distance anharmonique (11) de ce côté au sommet opposé. Les trois produits que l'on obtient ainsi sont égaux.

L'*aire corrélative* S (*par rapport à* N) d'un triangle sera le produit de l'angle anharmonique d'un sommet (c'est-à-dire des deux côtés qui le déterminent) par la moitié de l'angle anharmonique (13) de ce sommet avec le côté opposé. Les trois produits que l'on obtient ainsi sont égaux.

30. La somme ($2p = a + b + c$) des longueurs anharmoniques des côtés a, b, c sera dite *le périmètre anharmonique* du triangle (par rapport à n).

Corrélativement, la somme ($2P = A + B + C$) des angles anharmoniques des trois sommets sera dite *le périangle anharmonique* du triangle (par rapport à N).

31. *Applications.* — Toutes formules métriques telles que

$$2S = bc \sin A = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{2R} = 2pr,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R, \quad \ldots,$$

restent vraies quand on remplace les longueurs et angles métriques par des longueurs anharmoniques et des angles anharmoniques, R et r étant alors les rayons anharmoniques (6, 1°) des coniques homoponctuelles circonscrite et inscrite.

En outre, ces formules entraînent les suivantes, r' et R' étant les angles anharmoniques (9, 1°) des coniques homotangentes inscrite et circonscrite :

$$2s = \mathrm{BC}\ \mathrm{qu}\ \sin a$$
$$= 2\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{P}-\mathrm{A})(\mathrm{P}-\mathrm{B})(\mathrm{P}-\mathrm{C})} = \frac{\mathrm{ABC}}{2r'} = 2\mathrm{PR}',$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{qu}\sin a} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{qu}\sin b} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{qu}\sin c} = \frac{\mathrm{ABC}}{2s} = 2r', \quad \ldots.$$

32. On reconnaîtra aisément que les considérations qui précèdent renferment les éléments nécessaires pour la généralisation et la dualisation de toutes les propriétés métriques du plan. Il est également facile de prévoir que des définitions, plus nombreuses sans doute, parfois plus compliquées, mais du même genre, permettront de généraliser et dualiser les propriétés métriques de l'espace.

Mais, entre la Géométrie plane et la Géométrie générale de l'espace, il existe un intermédiaire important, la *Géométrie de l'espace autour du point*, dont j'ai déjà signalé l'utilité au point de vue des propriétés projectives (*Nouvelles Annales*, p. 446; 1898), et qu'il est indispensable de considérer au point de vue métrique. Je reviendrai sur ce sujet dans un prochain article.

Note.

Sur la division quasimétrique des angles et des segments.

La notion de l'angle anharmonique de deux droites a déjà été prévue, car, dans le *Répertoire bibliographique* [**K10d**] se trouve cette mention : *Expression des angles à l'aide de rapports anharmoniques.*

Mais cette question, comme tant d'autres, se dédouble. Le point de vue de l'*angle anharmonique,* auquel nous l'avons examinée jusqu'ici, est celui qui se prête le mieux à l'applica-

tion de la dualité; mais il n'est nullement impossible d'introduire un point de vue *quasimétrique*, conservant la division des angles en degrés et subdivisions de degrés, et conduisant, par corrélation, à une division similaire pour les segments.

Un angle $\widehat{AOB}$ est de k degrés si, en décrivant du centre O un cercle qui coupe les côtés en A et B et le prolongement de OA en A′, puis inscrivant, dans le demi-cercle ABA′, une ligne brisée régulière de 180 côtés, le point B est le $(k+1)^{\text{ième}}$ sommet de cette ligne, A étant le premier.

De même (définition 1), par rapport à n ou $N_1 N_2$, *un angle* $\widehat{AOB}$ *sera dit de k degrés* si, en décrivant du pôle O de n une conique homoponctuelle coupant un côté en A et A′ et l'autre en B, puis inscrivant, dans la *demi-conique* ABA′, une ligne brisée de 180 côtés ayant des longueurs anharmoniques égales, B est le $(k+1)^{\text{ième}}$ sommet de cette ligne, A étant le premier.

Corrélativement (définition 2), par rapport à N ou $n_1 n_2$, *un segment* $\overline{aob}$ *sera dit de k degrés* si, en décrivant une conique homotangente ayant o pour polaire de N et à laquelle les tangentes menées de oa, ob sont a, a' et b, puis circonscrivant à la *demi-conique* aba' une ligne brisée de 180 sommets ayant des angles anharmoniques égaux, la droite b est le $(k+1)^{\text{ième}}$ côté de cette ligne, a étant le premier.

Examinons spécialement la définition 1. Elle s'applique sans difficulté quand, N_1 et N_2 étant imaginaires, le pôle O de n est intérieur. Il semble au premier abord qu'il n'en est pas de même quand, N_1 et N_2 étant réels, le pôle O est extérieur, car il peut arriver que les coniques homoponctuelles de pôle O coupent un côté de l'angle et ne coupent pas l'autre, ou ne coupent aucun côté. Cette difficulté n'est qu'apparente.

Remarquons en effet que, lorsque l'on donne le pôle O de n sans donner un point de passage, les coniques homoponctuelles sont seulement déterminées *d'espèce;* elles sont dans la même situation que deux coniques concentriques et homothétiques $\left(\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = \pm\lambda\right)$. Or, pour une même valeur de λ, il y a toujours deux coniques homothétiques correspondantes ou *conjuguées,* c'est-à-dire ayant les mêmes directions de diamètres conjugués, et il est indifférent, à ce point de vue, de

considérer l'une ou l'autre. Il en est de même pour les coniques homoponctuelles, les diamètres conjugués étant remplacés par les polaires conjuguées d'origine O. On peut donc admettre que, au lieu de décrire du (centre ou) pôle O une conique, on décrira un *couple* de coniques conjuguées ou, ce qui revient au même, que l'on considérera la conique *unique et double, de dimensions nulles* $\left(\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 0\right.$, ou sa transformée homoponctuelle$\left.\right)$. Par rapport à ce couple ou à cette conique double, toutes les intersections de (diamètres ou) polaires sont réelles.

Il est facile d'interpréter corrélativement la définition 2 [1]. D'ailleurs, dans ces questions, il ne s'agit évidemment pas de faire des tracés, mais de donner des définitions telles qu'une expression employée ait un sens. C'est dans ces conditions que l'évaluation des angles en degrés et subdivisions de degré pourra être maintenue dans les énoncés de théorèmes et conservera même, pour les segments, une signification dans les énoncés corrélatifs.

On peut dire, par exemple : Dans tout triangle ABC, les valeurs *quasimétriques* des trois angles intérieurs satisfont à la relation $A + B + C = 180°$. Mais, de même, dans le triangle (a, b, c), les valeurs *quasimétriques* des trois côtés intérieurs satisfont à $a + b + c = 180°$, étant entendu que ces valeurs quasimétriques sont essentiellement différentes des valeurs anharmoniques précédemment définies.

On peut observer encore qu'il y a quelque chose de peu satisfaisant à n'évaluer métriquement un segment que d'une seule manière, par sa longueur, tandis qu'un angle peut s'évaluer *au moins* de trois manières : par l'arc sous-tendu (nombre de degrés), par ses lignes trigonométriques, et enfin par un rapport anharmonique. Or, à ces trois modes pour les angles, la dua-

(1) Dans une famille de coniques homothétiques, la conique de dimensions nulles est celle qui passe par son centre. De même, la conique homoponctuelle de rayon anharmonique nul est celle qui passe par son pôle O de n. Corrélativement, la conique homotangente d'angle anharmonique nul est celle qui touche sa polaire o de N : c'est un système de deux points (r ou i).

lité fait correspondre trois modes pour les segments. A l'angle anharmonique correspond la longueur anharmonique. Mais, aux évaluations des angles par degrés ou par lignes, correspondent des évaluations des segments par (quasi) degrés et par quasi-lignes. La conclusion que l'on peut en tirer est qu'il y a bien des formes pour exprimer une même propriété.

[$L^2$8b]

SUR LES NORMALES DE L'ELLIPSOÏDE;

Par M. O. BÖKLEN.

Étant donné un ellipsoïde $\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} - 1 = 0$ et un point M ayant pour coordonnées x, y, z, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$\xi = \frac{ax}{a+u}, \qquad \eta = \frac{by}{b+u}, \qquad \zeta = \frac{cz}{c+u},$$

où u est une des racines de l'équation

$$(1) \qquad \frac{ax^2}{(a+u)^2} + \frac{by^2}{(b+u)^2} + \frac{cz^2}{(c+u)^2} - 1 = 0.$$

En développant suivant les puissances de u, on a

$$\begin{aligned}
& u^6 \\
& + u^5(2a + 2b + 2c) \\
& + u^4(a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4bc - 4ca - ax^2 - by^2 - cz^2) \\
& + u^3.2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\
& \qquad - a(b+c)x^2 - b(c+a)y^2 - c(a+b)z^2] \\
& + u^2[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4abc(a+b+c) - a(b^2+c^2)x^2 \\
& \qquad - b(c^2+a^2)y^2 - c(a^2+b^2)z^2 - 4abc(x^2+y^2+z^2)] \\
& + u.2abc[ab + bc + ca - (b+c)x^2 - (c+a)y^2 - (a+b)z^2] \\
& + a^2b^2c^2 - abc(bcx^2 + cay^2 + abz^2) = 0.
\end{aligned}$$

La variable u est égale au produit NP, où N désigne une des normales MS, que l'on peut abaisser du point M à l'ellipsoïde, et P la distance du centre O au plan tangent en S. Soient donc u_1, u_2, ..., u_6 les six racines de l'équation (1), N_1, N_2, ..., N_6 les six normales abaissées du point M à l'ellipsoïde, et P_1, P_2, ..., P_6 les distances des six plans tangents aux pieds S_1, S_2, ..., S_6 de ces normales du centre O; alors on a les relations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \\ \quad = N_1 P_1 + N_2 P_2 + \ldots + N_6 P_6 = -2(a+b+c). \end{cases}$$

Donc :

Si l'on abaisse d'un point quelconque les six normales à un ellipsoïde et que l'on forme les six produits de chaque normale et de la distance du plan tangent de son pied au centre de l'ellipsoïde, la somme de ces produits est constante et égale à la moitié de la somme des carrés des axes.

D'après le dernier terme de l'équation (1), on a le théorème

$$(3)\quad \begin{cases} u_1 u_2 \ldots u_6 = N_1 P_1 . N_2 P_2 \ldots N_6 P_6 \\ \quad = a^2 b^2 c^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c}\right); \end{cases}$$

le produit de ces six paramètres u_1, u_2, ... est donc égal à zéro ou constant, suivant que le point d'où partent les six normales se trouve sur l'ellipsoïde donné ou sur une surface semblable.

Des coefficients de u^4, u^3, u^2, u on peut déduire quatre autres relations semblables; mais il faut remarquer que le signe des produits NP est positif ou négatif

selon que les points M et O se trouvent de côtés différents du plan tangent ou du même côté.

Si l'on admet, au contraire, que dans l'équation (1) les quantités x, y, z soient variables et u constant, on obtient une série ou un système Σ d'ellipsoïdes dont chacun correspond à une valeur particulière de u; ils forment cinq groupes, suivant que u se trouve entre les limites $+\infty$ et zéro, zéro et $-c$, $-c$ et $-b$, $-b$ et $-a$, $-a$ et $-\infty$.

Pour $u = -c$, $-b$, $-a$ on obtient les sections principales (courbes cuspidales) de la surface de centres de l'ellipsoïde donné ($u = 0$); les ellipsoïdes du second, troisième et quatrième groupe sont inscrits dans cette surface (*voir* mon Mémoire sur la courbure des surfaces, *Crelle*, t. 96, p. 152).

Soient p, q, r les demi-axes d'un ellipsoïde du système Σ, ou, d'après (1),

$$p = \frac{a+u}{\sqrt{a}}, \qquad q = \frac{b+u}{\sqrt{b}}, \qquad r = \frac{c+u}{\sqrt{c}};$$

en éliminant u on a

$$(4) \qquad p\sqrt{a} - a = q\sqrt{b} - b = r\sqrt{c} - c:$$

c'est l'équation d'une droite, si l'on regarde p, q, r comme coordonnées cartésiennes, et d'une cubique gauche, si p, q, r sont des coordonnées tangentielles.

En remplaçant, dans l'équation (2), $u_1, u_2, \ldots$ par leurs valeurs tirées de l'équation (4), on trouve

$$(5) \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = \dfrac{2}{\sqrt{a}}(2a - b - c), \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_6 = \dfrac{2}{\sqrt{b}}(-a + 2b - c), \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_6 = \dfrac{2}{\sqrt{c}}(-a - b + 2c). \end{cases}$$

D'où la proposition suivante :

La somme des axes des six ellipsoïdes qui passent par un point M d'où l'on peut mener six normales réelles à un ellipsoïde donné est constante, ces axes étant pris dans l'une ou l'autre des trois directions de coordonnées.

D'un point M on peut mener six, quatre ou deux normales à un ellipsoïde, suivant qu'il est situé au dedans des deux parties F_1 et F_2 de la surface de centres, ou au dedans de l'une et au dehors de l'autre, ou enfin au dehors de toutes les deux.

Des deux courbes, développée d'une ellipse et ellipse (courbe cuspidale), qui sont les intersections de F_1 et F_2 avec les plans des coordonnées, la développée dans l'un de ces plans, l'ellipse dans l'autre, et dans le troisième une partie de la développée et une partie de l'ellipse appartiennent à F_1 ; de même par rapport à F_2.

A l'égard des signes de p_1, p_2, q_1, ..., dans l'équation (5) il faut distinguer auquel des cinq groupes marqués ci-dessus les ellipsoïdes respectifs appartiennent. Si, par exemple, p_3 est au troisième groupe et p_4 au quatrième, le dernier est négatif, puisque ces deux groupes sont séparés entre eux par une valeur de p égale à zéro.

L'équation (1) présente quelque analogie avec celle des surfaces homofocales

$$(6)\qquad \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 1 = 0.$$

En développant suivant les puissances de λ on trouve

$$\begin{aligned}
&\lambda^3\\
&+\lambda^2(a+b+c-x^2-y^2-z^2)\\
&+\lambda\,[ab+bc+ca-(b+c)x^2-(c+a)y^2-(a+b)z^2]\\
&+abc-bcx^2-cay^2-abz^2 = \lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C.
\end{aligned}$$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation (6), et $A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$; on voit que le point M, par lequel passent les trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde donné

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

se meut sur une sphère concentrique ou sur un ellipsoïde, selon que les coefficients A, B ou C sont constants. Les surfaces B = const. et C = const. sont les mêmes que celles qui se rattachent aux deux derniers membres de l'équation (1); on peut donc énoncer la proposition suivante en complétant l'équation (3) :

Le produit des six paramètres du système Σ des six ellipsoïdes passant par un point M, *ainsi que celui des trois paramètres des surfaces homofocales qui passent par le même point* M, *est égal à zéro ou constant, selon que ce point est situé sur l'ellipsoïde donné ou sur une surface semblable.*

Les limites qui se rapportent aux ellipsoïdes (Σ)

$$+\infty \text{ et zéro,}\quad \text{zéro et } -c,\quad -c \text{ et } -b,$$
$$-b \text{ et } -a,\quad -a \text{ et } -\infty$$

sont les mêmes pour les surfaces homofocales : les deux premiers groupes, $\lambda = +\infty$ et $\lambda = -c$, comprennent les ellipsoïdes, avec l'ellipsoïde donné $\lambda = 0$, et l'ellipse focale $\lambda = -c$; dans le troisième les hyperboloïdes à une nappe avec l'hyperbole focale $\lambda = -b$; dans le quatrième les hyperboloïdes à deux nappes avec l'ellipse imaginaire $\lambda = -a$; et dans le cinquième les surfaces imaginaires.

[K21b]

SUR LE PROBLÈME DE LA POLYSECTION DE L'ANGLE;

PAR MM. MARIANTONI ET PALATINI, à Sondrio (Italie).

1. Si l'on donne dans le plan deux points A et B, et si l'on veut construire le lieu d'un point X tel que l'un des angles que la droite AX fait avec la direction AB soit la $n^{\text{ième}}$ partie de l'un des angles que la droite BX fait avec la direction BA, on obtient entre les faisceaux (A) et (B) une correspondance $(1, n)$, et, en observant qu'un rayon BX de (B) correspond à n rayons de (A), parmi lesquels il y a AB, on peut conclure que *le lieu cherché est une courbe algébrique* C_n, *de degré* n, *qui passe* $n - 1$ *fois par* A.

Il est bien facile de démontrer, en raisonnant par l'absurde, que C_n *est une courbe irréductible,* et l'on peut aisément établir son équation.

Si l'on prend le point A pour origine, AB pour axe des x et la perpendiculaire à AB menée par A pour axe des y, et si l'on suppose que le segment AB soit pris pour unité, cette équation est

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum (-1)^{\frac{n-s}{2}} \binom{n}{n-s+1} \left(\frac{n+1}{s} x - 1\right) x^{s-1} y^{n-s} = 0 \\ \qquad\qquad \left[\binom{n}{n+1} = 0, \ \binom{n}{0} = 1\right]. \end{array} \right.$$

Dans cette équation, on doit donner à s toutes les valeurs impaires ou paires depuis 0 jusqu'à n (0 et n inclus), selon que n est impair ou pair.

Au rayon BA du faisceau (B) correspondent en (A) les tangentes aux $n - 1$ branches de la courbe qui pas-

sent par A, et d'après la nature de la correspondance on conclut que *les tangentes aux branches de* C_n *qui passent par* A *sont réelles et distinctes, et qu'elles divisent, avec la droite* AB, *le faisceau* (A) *en* $2n$ *parties égales.*

Les rayons du faisceau (A) qui correspondent à un rayon du faisceau (B) sont tous réels ; par conséquent, *les intersections de* C_n *avec les droites réelles qui passent par* B *sont toutes réelles.*

Une ligne droite b qui passe par B rencontre C_n en n points réels qui, avec A, déterminent n droites, lesquelles font, avec la direction AB, des angles dont chacun est la $n^{\text{ième}}$ partie d'un des angles que fait b avec la direction BA. Mais si les intersections d'une courbe irréductible avec les rayons d'un faisceau peuvent être construites par la règle et le compas, la courbe doit être de l'ordre 2^m, lorsque la courbe ne passe pas par le centre du faisceau (¹) ; il en résulte que *la polysection d'un angle générique au moyen de la règle et du compas est possible seulement lorsque le nombre des parties est* 2^m, *m étant un nombre entier quelconque.*

En posant, dans (α),

$$y = px + q,$$

nous obtiendrons donc, pour $n = 2^m$, une équation résoluble par radicaux quadratiques.

On peut encore démontrer aisément que *la direction* AB *et les directions des asymptotes de* C_n *menées par un point* X *de* AB *divisent le faisceau* (X) *en* $2(n+1)$ *parties égales.*

(¹) V.-J. Petersen, *Om Liguinger der kunne loses Ned Koadratod* (*Theorie der Algebraischen Gleichungen.* Copenhague, 1878).

La courbe C_n, outre qu'elle passe $n - 1$ fois par A, rencontre AB en un point X, tel que

$$AX = \frac{n}{n+1},$$

et C_{n-1}, outre qu'elle passe $n - 2$ fois par A, coupe AB en un point Y, tel que

$$AY = \frac{n-1}{n};$$

cela revient à dire que les centres harmoniques du point à l'infini de AB par rapport aux n points, dont $n - 1$ sont réunis en A et le $n^{\text{ième}}$ est X, sont $n - 1$ points dont $n - 2$ sont réunis en A et le $(n - 1)^{\text{ième}}$ est Y. De plus, la première polaire de AB par rapport au groupe des tangentes à C_n en A est le groupe des tangentes à C_{n-1} en A, et la première polaire de AB par rapport au groupe des lignes droites menées par un point M de AB, parallèlement aux asymptotes de C_n, est le groupe des lignes droites menées par M parallèlement aux asymptotes de C_{n-1}. Tout cela signifie que C_{n-1} a un point multiple d'ordre $n - 2$ en A, et que les tangentes en ce point sont les tangentes de la première polaire Γ du point à l'infini de AB, par rapport à C_n, et qu'elle a en commun avec Γ le point Y et les points à l'infini; et comme ces conditions sont en nombre égal à $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}$, on peut en conclure que C_{n-1} *est la première polaire du point à l'infini de* AB *par rapport à* C_n.

2. Lorsque n est un nombre impair, une des asymptotes est parallèle à l'axe y, et en faisant $x = 1$ dans (α), on obtient une équation en y de degré pair, qui contient seulement les puissances paires de la variable,

et, comme une circonférence (et par conséquent un angle droit) est divisible en parties égales au moyen de la règle et du compas, lorsque le nombre des parties est un nombre premier de la forme $2^{2^\mu}+1$, ainsi (en posant dans la dernière équation $y^2 = z$) la construction du polygone régulier de $2^{2^\mu}+1$ côtés, lorsqu'elle est possible, dépend de la résolution d'une équation du degré $2^{2^\mu-1}$.

La construction du polygone régulier de 17 côtés dépend de la résolution de l'équation

$$(1)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{17}{2n} z^n = 0, \qquad \left[\binom{17}{0} = 1\right],$$

dont les racines, toutes réelles et positives, sont

$$z_i = \operatorname{tang}^2(2i-1)\varphi \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, 8,\ \varphi = \frac{\pi}{34}\right).$$

Si l'on considère la relation

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\,\frac{1-\operatorname{tang}^2 K\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 K\varphi}\,\frac{1-\operatorname{tang}^2 K_1\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 K_1\varphi} \\ & \quad = \frac{1-\operatorname{tang}^2(K-K_1)\varphi}{1+\operatorname{tang}^2(K-K_1)\varphi} + \frac{1-\operatorname{tang}^2(K+K_1)\varphi}{1+\operatorname{tang}^2(K+K_1)\varphi}, \end{aligned} \right.$$

et si l'on pose

$$(3)\qquad Z_s = \frac{1-z_s}{1+z_s} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, 8),$$

on peut vérifier aisément que *le double du produit de deux des valeurs de z est égal et de signe contraire à la somme de deux des valeurs de Z, dont une peut être aussi un des facteurs du produit.*

Par exemple, nous avons

$$2Z_5Z_8 = -(Z_4+Z_6), \qquad 2Z_1Z_8 = -(Z_1+Z_2), \qquad \ldots.$$

On peut encore vérifier que les relations entre les valeurs de z analogues à celles-ci, au nombre de 28, peuvent être groupées en quatre cycles, dont trois contiennent 8 relations chacun et le quatrième n'en contient que 4. C'est ce dernier cycle, le plus simple entre tous, que nous allons écrire

$$\begin{aligned}
2Z_2Z_3 &= -(Z_5+Z_8) = -a,\\
2Z_5Z_8 &= -(Z_4+Z_6) = -b,\\
2Z_4Z_6 &= -(Z_1+Z_7) = -c,\\
2Z_1Z_7 &= -(Z_2+Z_3) = -d.
\end{aligned}$$

Évidemment, il suffit de calculer a, b, c, d, car alors Z_2 et Z_3 sont les racines de l'équation

$$M^2 - dM - \frac{1}{2}a = 0, \qquad \ldots;$$

ainsi nous avons toutes les valeurs de Z et, par conséquent, de z. Pour choisir les signes des radicaux, il suffit de se reporter aux relations (3) et aux variations de la tangente trigonométrique.

En posant

$$\sum_1^8 Z_i = K, \qquad Z_r + Z_s = S_{r,s}$$

et ayant égard aux relations (2), on trouve

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= K,\\
2ab &= -S_{1,8} - S_{3,5} - S_{2,8} - S_{5,7},\\
2bc &= -S_{5,6} - S_{3,4} - S_{2,6} - S_{4,8},\\
2cd &= -S_{7,8} - S_{1,4} - S_{6,7} - S_{1,5},\\
2da &= -S_{3,6} - S_{1,3} - S_{2,7} - S_{2,4}.
\end{aligned}$$

La somme de ces quatre produits est donc égale à $-4K$, et puisqu'on a

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d),$$

en posant

$$a + c = A, \qquad b + d = B,$$

nous avons

$$A + B = K, \qquad AB = -2K.$$

Or K est une fonction symétrique des racines de (1); par conséquent elle est exprimable au moyen des coefficients de cette équation. Si nous appelons Σ_s la somme des produits des racines de (1) s à s, nous pouvons aisément établir que

$$\begin{aligned} K &= \frac{8 + 6\Sigma_1 + 4\Sigma_2 + 2\Sigma_3 - 2\Sigma_5 - 4\Sigma_6 - 6\Sigma_7 - 8\Sigma_8}{1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 + \Sigma_7 + \Sigma_8} \\ &= \frac{32768}{65536} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc A et B sont les racines de l'équation

$$2\theta^2 - \theta - 2 = 0,$$

et comme on a

$$ac = -K, \qquad bd = -K,$$

ainsi a, c, b, d sont respectivement les racines des équations

$$2\theta^2 - 2A\theta - 1 = 0, \qquad 2\theta^2 - 2B\theta - 1 = 0.$$

Notre équation est désormais résolue au moyen de radicaux quadratiques, car il n'y a pas autre chose à faire qu'à résoudre les équations du deuxième degré que nous avons établies, en tenant compte des signes des radicaux.

[Q2]

UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS;

Par M. Henri PICCIOLI.

Il a été démontré que les développantes des hélices cylindriques de l'espace ordinaire jouissent de la propriété caractéristique d'être des courbes planes. On peut chercher si cette propriété se conserve pour les courbes de l'espace à n dimensions; tel est le but de cette Note.

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}$ étant les cosinus directeurs de la tangente d'une courbe L de l'espace à n dimensions S_n; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées courantes de ses points exprimées par l'arc s, considérons la courbe

$$(1)\quad y_1 = x_1 - s\alpha_{11}, \quad y_2 = x_2 - s\alpha_{12}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n - s\alpha_{1n},$$

qui représente une développante de L, et cherchons quelle doit être la nature de L pour que la courbe (1) appartienne à un espace S_{n-1}.

Il faudra évidemment que l'on ait, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes,

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \\ - s(a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{12} + \ldots + a_n\alpha_{1n}) = 0.$$

Différentions, en tenant compte des formules de Serret généralisées par M. Brunel ([1]); remarquant qu'il

([1]) Brunel, *Propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions* (*Math. Ann.*, B. XIX).

y a $2n$ termes qui se détruisent, on trouve la condition

$$a_1\alpha_{21} + a_2\alpha_{22} + \ldots + a_n\alpha_{2n} = 0,$$

$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}$ étant les cosinus directeurs de la normale principale de L. Cette condition, comme on le voit facilement, est aussi suffisante.

Or, la ligne L devant avoir ses normales principales perpendiculaires à la direction fixe

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}},$$

est une hélice du cylindre obtenu en conduisant de ses points les S_1 parallèles à cette direction.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Parmi les courbes de S_n, il y en a qui ont la propriété que leurs développantes appartiennent à un espace S_{n-1} : ces lignes sont des hélices tracées sur des surfaces cylindriques à deux dimensions dont les génératrices sont perpendiculaires à cet espace S_{n-1}.

Supposons que n soit un nombre impair $2h+1$, et que les $2h$ rayons de courbure de L soient constants. D'après un théorème de M. Brunel, L sera une hélice tracée sur un cylindre ayant pour base une courbe de S_{2h} avec les mêmes $2h-1$ premiers rayons de courbure (à une constante près), c'est-à-dire une courbe placée sur l'hypersphère de S_{2h}. En tenant compte du résultat qui précède, on voit tout de suite que l'on a la proposition que voici :

Les courbes à courbures constantes de l'espace à nombre impair de dimensions ont pour développantes celles des courbes hypersphériques à courbures constantes, bases des cylindres qui les contiennent.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1898. SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0,$$

où a désigne une constante et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° *Former le système des équations différentielles des caractéristiques;*

2° *Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles;*

3° *Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée;*

4° *Dire à quoi doit se réduire la fonction $F(z)$ pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.*

I. Soit

$$f(x, y, z, p, q) = (px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0.$$

On a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p} = P = (px + qy)x - ay,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial q} = Q = (px + qy)y + ax,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = X = (px + qy)p - aq.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = Y = (px + qy)q - ap,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = Z = F'(z).$$

On sait que les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q} = \frac{dp}{-(\mathrm{X} + p\mathrm{Z})} = \frac{dq}{-(\mathrm{Y} + q\mathrm{Z})},$$

c'est-à-dire,

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{(px+qy)x - ay} &= \frac{dy}{(px+qy)y + ax} \\ &= \frac{dz}{(px+qy)^2 - a(py-qx)} \\ &= \frac{dp}{-[(px+qy)p + aq + p\mathrm{F}'(z)]} \\ &= \frac{dq}{-[(px+qy)q - ap + q\mathrm{F}'(z)]}. \end{aligned} \right.$$

II. On peut trouver une intégrale de ces équations en formant deux rapports égaux aux précédents et ayant respectivement pour numérateurs les différentielles des quantités $px + qy$ et $py - qx$ qui figurent dans l'équation donnée. Chacun des rapports (E) est égal aux suivants :

$$\begin{aligned} \frac{p\,dx + x\,dp}{-apy - aqx - px\mathrm{F}'(z)} &= \frac{d(px)}{-a(py+qx) - px\mathrm{F}'(z)} \\ = \frac{d(qy)}{a(qx+py) - qy\mathrm{F}'(z)} &= \frac{d(px+qy)}{-(px+qy)\mathrm{F}'(z)} \\ = \frac{d(py)}{a(px-qy) - py\mathrm{F}'(z)} &= \frac{d(qx)}{a(px-qy) - qx\mathrm{F}'(z)} \\ &= \frac{d(py-qx)}{-(py-qx)\mathrm{F}'(z)}. \end{aligned}$$

D'où l'équation

$$\frac{d(px+qy)}{px+qy} = \frac{d(py-qx)}{py-qx}.$$

Intégrant, on obtient

$$(1) \qquad \frac{px+qy}{py-qx} = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

On a ainsi une intégrale du système (E) *indépendante* de la fonction $F(z)$.

III. D'après la méthode de Lagrange, si l'on résout les équations (1) et $f=0$ par rapport à p et q et que l'on substitue les valeurs trouvées dans l'équation aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

cette équation sera complètement intégrable; après l'intégration, qui introduira une deuxième constante arbitraire β, on aura z en fonction de x, y, α, β, satisfaisant à l'équation donnée, c'est-à-dire une intégrale complète de cette équation.

On a

$$px + qy = \alpha(py - qx),$$
$$\alpha^2(py - qx)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0;$$

d'où

$$py - qx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}}{\alpha^2}.$$

On peut prendre seulement le signe + devant le radical, en convenant que celui-ci sera susceptible d'une double détermination. Des équations

$$\alpha^2(py - qx) = a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)},$$
$$\alpha\,(px + qy) = a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)},$$

on déduit, en éliminant successivement p et q,

$$p\alpha^2(x^2 + y^2) = \quad (y + \alpha x)\,\left[a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}\right],$$
$$q\alpha^2(x^2 + y^2) = (-x + \alpha y)\left[a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F(z)}\right].$$

En substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on a

$$\alpha^2(x^2+y^2)\,dz = \left[a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}\right]\left[(y+\alpha x)\,dx+(-x+\alpha y)\,dy\right]$$

ou

$$\frac{\alpha^2\,dz}{a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}} = \frac{\alpha(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Intégrant, on a l'équation

$$(2)\qquad \alpha^2\int\frac{dz}{a+\sqrt{a^2-2\alpha^2 F(z)}} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{L}(x^2+y^2)-\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}+\beta,$$

définissant une intégrale complète de l'équation donnée $f(x, y, z, p, q) = 0$.

IV. On sait que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$dp\,dx+dq\,dy=0.$$

Remplaçant, dans cette équation homogène, dx, dy, dp, dq par des quantités proportionnelles tirées des équations (E), on a

$$\begin{aligned}&[(px+qy)p+aq+pF'(z)][(px+qy)x-ay]\\&\quad+[(px+qy)q-ap+qF'(z)][(px+qy)y+ax]=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(px+qy)^3-2a(px+qy)(py-qx)-a^2(px+qy)\\&\qquad+F'(z)[(px+qy)^2-a(py-qx)]=0\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation donnée $f=0$,

$$-(px+qy)[2F(z)+a^2]+F'(z)[(px+qy)^2-a(py-qx)]=0.$$

D'autre part, d'après l'intégrale (1), on a

$$py-qx=\frac{px+qy}{\alpha};$$

par suite, l'équation précédente devient, après suppression du facteur $px+qy$,

$$-[2F(z)+a^2]+F'(z)\left[px+qy-\frac{a}{\alpha}\right]=0$$

ou

$$(3)\qquad [(px+qy)F'(z)-2F(z)-a^2]\alpha-aF'(z)=0.$$

Si l'on considère une surface intégrale, le long d'une caractéristique, α est constant, mais varie d'une caractéristique à l'autre, de sorte que l'équation précédente, du premier degré en α, doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de α; pour cela, il faut et il suffit

$$(px+qy)F'(z)-2F(z)-a^2=0$$

et

$$aF'(z)=0.$$

En supposant la constante a différente de zéro, ces deux équations se réduisent aux suivantes :

$$F'(z)=0,$$
$$2F(z)+a^2=0.$$

c'est-à-dire à une seule

$$F(z)=-\frac{a^2}{2}.$$

L'intégrale complète (2) devient dans ce cas

$$\frac{\alpha^2 z}{a(1+\sqrt{1+\alpha^2})}=\frac{\alpha}{2}L(x^2+y^2)-\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

On voit alors que la section d'une surface intégrale par un plan $z=h$ est une spirale logarithmique.

Si la constante a est nulle, l'équation donnée est

$$(px+qy)^2+2F(z)=0;$$

elle se décompose en deux équations linéaires

$$px+qy\pm\sqrt{-2F(z)}=0.$$

Les équations des courbes caractéristiques sont, en attribuant au radical une double détermination,

$$(E_1) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}}.$$

Une première intégrale

$$y = \alpha_1 x$$

montre que les caractéristiques sont des courbes planes; le plan osculateur en un point quelconque d'une caractéristique se confond avec le plan de la courbe; celle-ci devant être une ligne asymptotique d'une surface intégrale, le plan osculateur doit être tangent à la surface; alors le plan d'une courbe caractéristique doit être tangent à la surface en tous les points de cette courbe; une surface intégrale quelconque étant un lieu de caractéristiques, on en déduit que c'est une surface développable et que les caractéristiques sont des droites. Cela étant, il est facile de déterminer la fonction $F(z)$, car une deuxième intégrale des équations (E_1) déduite de l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}}$$

ou

$$d\,L(x) = \frac{dz}{\sqrt{2F(z)}} = d\,L\,\varphi(z)$$

est

$$cx = \varphi(z),$$

c désignant une constante arbitraire et φ une fonction déterminée. Il faut, d'après ce qui précède,

$$\varphi(z) = bz + b'.$$

Or

$$\frac{dz}{\sqrt{-2F(z)}} = \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)} = \frac{b\,dz}{bz+b'} = \frac{dz}{z+\gamma}.$$

d'où

$$-2F(z) = (z+\gamma)^2.$$

Les deux équations linéaires en lesquelles se décompose l'équation donnée sont

$$px + qy = \pm(z+\gamma).$$

On peut conserver seulement le signe + et l'on a

$$px + qy = z + \gamma,$$

équation différentielle des cônes de sommet (o, o, $-\gamma$).

Remarque. — Quand $F(z) = -\frac{a^2}{2}$, les caractéristiques qui sont des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales, jouissent de cette propriété : *leurs tangentes appartiennent à un complexe de droites;* cette propriété est la réciproque de celle-ci : *quand les tangentes aux courbes caractéristiques, pour une équation* $f(x, y, z, p, q) = 0$, *appartiennent à un complexe de droites, ces caractéristiques sont des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.* La démonstration est facile; on sait que les tangentes aux courbes caractéristiques qui passent par un point $M(x, y, z)$ sont les génératrices d'un cône (T), enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales passant par ce point. Si l'on cherche l'enveloppe du plan

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

p et q étant liés par la relation

$$f(x, y, z, p, q) = (px+qy)^2 - 2a(py-qx) - a^2 = 0,$$

ou encore, si l'on remarque que $f(x, y, z, p, q) = 0$ peut être regardée comme l'équation tangentielle du cône parallèle à (T) menée par l'origine, on a pour l'équation

du cône (T)

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & -ay & X-x \\ xy & y^2 & ax & Y-y \\ -ay & ax & -a^2 & Z-z \\ X-x & Y-y & Z-z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Une génératrice de ce cône, d'équations

$$\frac{X-x}{\lambda} = \frac{Y-y}{\mu} = \frac{Z-z}{\nu}$$

aura pour coordonnées pluckériennes

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad l = \nu y - \mu z, \quad m = \lambda z - \nu x, \quad n = \mu x - \lambda y.$$

L'équation du cône (T) peut s'écrire, après développement du déterminant et simplification

$$a(\lambda^2 + \mu^2) + 2n\nu = 0;$$

c'est l'équation d'un complexe de droites du second ordre; les tangentes aux caractéristiques appartiennent à ce complexe.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Les fonctions* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *sont supposées continues, ainsi que leurs dérivées partielles du pre-*

mier ordre, pour tous les systèmes de valeurs de x, y, correspondant aux points situés dans une aire (A); *on désigne par* (C) *une courbe fermée contenue tout entière dans* (A).

1° *Donner la condition que doivent remplir* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *pour que l'intégrale curviligne*

$$\int_{(C)} [\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy]$$

ait une valeur indépendante de (C);

2° *En déduire les conditions que doivent remplir* φ *et* ψ *pour que l'intégrale*

$$\int_{(C)} (\varphi + i\psi)(dx + i\,dy)$$

soit elle-même indépendante de (C);

3° *Faire voir quelle est dans ce cas la propriété de la transformation géométrique définie par les deux équations*

$$\chi = \varphi(x,y), \qquad \gamma = \psi(x,y);$$

4° *Dire quelles relations il y a alors entre les deux familles de courbes définies par les deux équations*

$$\varphi(x,y) = \text{const.}, \qquad \psi(x,y) = \text{const.}$$

II. 1° *Développer en série de Fourier la fonction* $f(x)$ *égale à* x *dans l'intervalle* $(-\pi, 0)$, *et à* $(x + \pi)$ *dans l'intervalle* $(0, \pi)$;

2° *Expliquer* a priori *cette circonstance que le développement ne renferme pas de cosinus;*

3° *La fonction* $f(x)$ *étant toujours égale à* $x + \pi$ *dans l'intervalle* $(0, \pi)$, *quelle fonction de* x *doit-elle être dans l'intervalle* $(-\pi, 0)$ *pour que le développement ne renferme que des cosinus.*

Géométrie.

I. *Étudier la surface lieu des tangentes à une courbe gauche. Qu'entend-on par* développement *d'une telle surface? Quels sont les éléments qui se conservent dans cette déformation?*

II. *On considère une courbe gauche* (c) *dont la courbure est constante et égale à* $\frac{1}{a}$, *et la courbe* (c'), *lieu des centres de courbure de* (c).

On demande :

1° *La valeur de la courbure de* (c') *et le lieu de son centre de courbure;*

2° *Quelles relations il y a entre les torsions de* (c) *et* (c') *aux points correspondants;*

3° *Le lieu des centres des sphères osculatrices, pour chacune des deux courbes* (c) *et* (c').

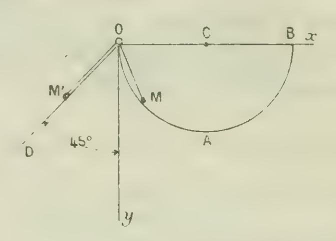
Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — I. *Établir les équations d'équilibre d'un fil parfaitement flexible et inextensible.*

II. *Cas où il y a une fonction de forces. Cas d'un fil tendu sans frottement sur une surface fixe et soumis seulement à la réaction de cette surface.*

Épreuve pratique. — *On considère dans un plan vertical* xOy *un demi-cercle fixe* OAB, *limité au diamètre horizontal* Ox *et une droite* OD, *faisant avec la verticale* Oy *un angle de* 45°. *Deux points matériels pesants* M *et* M', *de masses égales, sont assujettis à se mouvoir, le premier sur la demi-circonférence* OAB, *le second sur la droite* OD. *Ils sont réunis par un fil*

flexible et inextensible dont la masse est négligeable et qui passe en O *sur une poulie très petite d'axe normal au plan* xOy *et de masse négligeable.*



1° *Trouver la position d'équilibre du système;*

2° *Étudier le mouvement du système, en supposant qu'à l'instant initial on l'abandonne à lui-même sans vitesse, après avoir placé* M *en* O *et pris la précaution de tendre le fil;*

3° *Étudier en particulier le cas des petites oscillations.*

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. *Travail de la vapeur dans les machines Woolf et Compound. Avantages et inconvénients de ces machines.*

II. *Flambage des pièces à section constante, chargées debout. On déterminera les relations d'Euler fournissant une limite que ne doit pas excéder la charge, pour qu'il n'y ait pas flexion, dans les trois cas suivants :*

1° *La pièce est articulée et guidée à ses extrémités;*

2° *La pièce est encastrée à ses extrémités;*

3° *La pièce est encastrée à sa base, et complètement libre à l'extrémité à laquelle la charge est appliquée.*

Épreuve pratique. — *Calculer les éléments d'une*

turbine centrifuge à axe vertical du type Fourneyron, établie sous une chute de $1^{m},40$; *on peut disposer d'un débit de* 1200^{lit} *par seconde.*

Produire un croquis coté (à l'échelle) de la turbine projetée, et une épure indiquant le tracé des aubes et des directrices.

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer le calcul de l'éphéméride d'une planète, c'est-à-dire de l'ascension droite et de la déclinaison pour une date et en un lieu déterminés, lorsqu'on connaît les éléments de l'orbite de la planète.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la durée du jour (non compris le crépuscule) à Lille le* 25 *novembre* 1898. *La déclinaison du Soleil à midi vrai est*

$$-20^{\circ}49'18'',03.$$

On admettra qu'elle varie proportionnellement au temps, la variation horaire étant $-29'',07$.

Latitude de Lille : $50^{\circ}38'44''$.

On ne tiendra pas compte de la réfraction.

BIBLIOGRAPHIE.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Vienne et de Munich, et de la Société des Sciences de Gœttingue, avec la collaboration de nombreux savants, par MM. les Drs *H. Burkhardt*, pro-

fesseur de Mathématiques à l'Université de Zurich, et *W. Franz Meyer,* professeur de Mathématiques à l'Université de Kœnigsberg. Six vol. grand in-8°. Leipzig, Teubner. — Cette œuvre considérable sera entièrement publiée en langue allemande.

Présenter, sous une forme condensée et synoptique, un exposé aussi complet que possible des résultats acquis dans les diverses branches des Mathématiques, indiquer soigneusement la bibliographie de chaque partie et retracer par là le développement historique des méthodes employées dans les Sciences depuis le commencement du XIXe siècle, tel est le but que se propose cette Encyclopédie. Loin de se borner aux Mathématiques pures, elle traitera aussi, dans une large mesure, les applications des Mathématiques à la Mécanique, la Physique, l'Astronomie, la Géodésie, les sciences techniques, etc., de manière à renseigner le mathématicien sur les questions pour lesquelles les applications réclament son concours, et à faire connaître à l'astronome, au physicien, à l'ingénieur, etc., les solutions que les Mathématiques fournissent à leurs problèmes. Les démonstrations des propositions sont supprimées, ce qui est naturel dans un inventaire tel que celui-ci.

L'Encyclopédie comprendra environ 240 feuilles grand in-8°; chaque volume paraîtra en quatre livraisons de 10 feuilles. La première livraison a été publiée en octobre 1898.

L'Ouvrage peut rendre des services même aux personnes qui ne voudraient se renseigner que sur une partie déterminée des Sciences, car il ne suppose pas de connaissances préliminaires spéciales.

La Rédaction est assistée d'une Commission actuellement composée de MM. W. Dyck (Munich), G. v. Escherich (Vienne), F. Klein (Gœttingue), L. Boltzmann (Vienne) et H. Weber (Strasbourg).

Nous nous réservons de rendre compte ultérieurement des livraisons composant ce Recueil, sur la valeur et l'importance duquel il serait superflu d'insister, à mesure que ces livraisons seront publiées et parviendront à notre connaissance.

Cours développé d'Algèbre élémentaire, précédé d'un Aperçu sur les origines des Mathématiques élémentaires et suivi d'un Recueil d'exercices et de problèmes, par *B. Lefebvre, S. J.* Deux vol. in-8°. Tome I : Calcul agébrique (xlix-320 p.); tome II : Équations, Progressions, Logarithmes (543 p.). Namur, Wesmael-Charlier; 1898. Prix : 10fr.

Ce livre est le développement d'un *Cours d'Algèbre élémentaire* (1897), qui sert déjà de livre de texte dans beaucoup de collèges belges. Dans cet Ouvrage, le P. Lefebvre réalise résolument des améliorations recommandées depuis longtemps déjà et qui commencent timidement à prendre pied dans les programmes. Remarquons les quantités négatives, abstraites et concrètes, traitées en détail dès le début du cours ; le souci de la rigueur et le soin de rattacher les notions qui caractérisent l'Algèbre aux définitions fournies par l'étude préliminaire de l'Arithmétique ; le binome de Newton introduit de bonne heure et traité par les simples règles de la multiplication ; la théorie algébrique des imaginaires très amplement exposée ; les notions sur la théorie des limites et le calcul pratique des déterminants excellemment donnés ; enfin la théorie des maxima et minima particulièrement soignée. Un recueil d'exercices très vaste, très original et fort bien gradué termine chaque Volume.

Les professeurs apprécieront surtout l'Introduction historique et les nombreuses notes éparses dans tout l'Ouvrage. Le P. Lefebvre y fait preuve d'une érudition considérable : les données et les appréciations sur les hommes, sur les faits et sur les époques intéresseront plus d'un lecteur en France, où l'on n'a pas encore su, malgré des travaux consciencieux et de grande autorité, reconnaître assez généralement les mérites des vieux algébristes et mathématiciens français.

V. S.,

Docteur ès sciences physiques et mathématiques.

QUESTIONS.

516 (**1860**, 95). Soit l'équation

$$x^{2m+1} + ax^{2m-1} + bx^{2m-3} + \ldots + lx + k = 0,$$

qui ne renferme que des puissances impaires de l'inconnue (excepté x^0); il y a une racine réelle comprise entre

$$+2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}} \quad \text{et} \quad -2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}.$$ (TCHEBICHEF.)

1815. Démontrer que l'expression

$$1 - a^2 + a^4 - \ldots + a^{4p} = \frac{a^{4p+2} + 1}{a^2 + 1}$$

peut toujours être mise sous la forme de la somme de deux carrés, et que, si a est un nombre entier, les deux carrés en question sont aussi entiers. (C.-A. LAISANT.)

1816. On considère les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique C, et les quatre triangles T formés par les tangentes menées en ces points à C :

1° A chaque triangle T on peut circonscrire une conique A ayant les mêmes axes de symétrie que C; 2° Les normales à la conique A aux sommets du triangle T sont concourantes en un point P; 3° De chaque point P on mène la quatrième normale à la conique A correspondante. Les quatre normales ainsi obtenues sont parallèles, et leurs pieds sont en ligne droite.

(E. DUPORCQ.)

1817. Soient K et H les points d'intersection de deux cercles situés dans le même plan, dont les centres sont C, C'; on mène par K une droite mobile et par les points où cette droite rencontre les cercles, conduisons les tangentes respectives à ces courbes.

Le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une *cardioïde*. (CARDOSO-LAYNES.)

1818. Le lieu des barycentres des triangles qui sont formés par une tangente mobile à une ellipse avec les axes de cette courbe est une *Kreuzcurve*. (CARDOSO-LAYNES.)

NOTE SUR LES CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES ».

Deuxième concours pour 1898 ; Résultat. — Après examen des Mémoires adressés à la Rédaction pour le deuxième concours de 1898, le prix a été décerné à M. R. Bricard. Son Mémoire paraîtra dans l'un de nos prochains numéros.

Premier concours pour 1899. — Dans une pensée libérale à laquelle nous n'avons pu qu'applaudir, M. Gauthier-Villars nous a proposé d'étendre *à tous les lecteurs* des *Nouvelles Annales*, et non plus seulement aux abonnés, la faculté de prendre part à nos concours. Cette mesure étant rendue applicable même au premier concours pour 1899, il nous a semblé équitable de proroger le délai fixé pour la remise des Mémoires. Ceux-ci seront reçus, en conséquence, jusqu'au 15 *juillet* 1899, au lieu du 15 mai. A l'exception des modifications qui viennent d'être indiquées, les conditions du concours restent exactement les mêmes.

Pour prendre connaissance de ces conditions et du sujet, consulter le numéro de novembre 1898 (p. 485 à 488).

Les Rédacteurs.

[Q4bα]

LES LIGNES ARITHMÉTIQUES;

Par M. G. TARRY.

Nous allons étudier les restes des termes de la progression arithmétique

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots$$

de raison a, divisés par b, a et b étant des nombres entiers.

Le nombre des restes différents, y compris zéro, est au plus égal à b, et chaque reste se déduit du précédent en ajoutant à ce dernier le reste de a, et en retranchant b si la somme obtenue est plus grande que b.

Il résulte de là que les restes, ou résidus par rapport au module b, forment une suite périodique dont la période comprend un nombre de termes p, égal ou inférieur à b.

Ces résidus sont évidemment les résidus, tous différents, des p premiers termes

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad (p-1)a.$$

Le terme suivant, pa, donne pour résidu zéro, et l'on a

$$pa = qb.$$

On voit que les seuls termes divisibles par b sont

$$0, \quad pa, \quad 2pa, \quad 3pa, \quad \ldots$$

Le nombre ba, divisible par b, étant compris parmi ces termes,

$$ba = npa,$$

et, en remplaçant ba par son égal qb,

$$ba = nqb.$$

Ces deux égalités se réduisent à

$$b = np, \qquad a = nq.$$

Si a et b sont premiers entre eux, le nombre n qui divise à la fois a et b est égal à l'unité, et dans ce cas particulier

$$p = b.$$

D'où ces conséquences :

Les $(b-1)$ *premiers multiples d'un nombre entier* a, *premier avec* b, *donnent pour résidus, par rapport au module* b *et dans un certain ordre, les* $(b-1)$ *premiers nombres.*

Si l'on prolonge indéfiniment la série des multiples, les mêmes résidus se reproduisent dans le même ordre.

Les seuls multiples de a *divisibles par* b *sont* ba, $2ba$, $3ba$, ... En d'autres termes, *lorsqu'un nombre* b *divise le produit de deux facteurs* na *et qu'il est premier avec l'un* a, *il divise l'autre* n.

Quand on augmente tous les termes de la progression arithmétique d'un même nombre entier c, le nombre des résidus différents reste le même. Donc :

Si le nombre n *est premier avec* a, *les* n *termes de la progression arithmétique*

$$c,\quad c+a,\quad c+2a,\quad \ldots,\quad c+(n-1)a,$$

sont respectivement congrus, suivant le module n, *quel que soit l'entier* c, *aux nombres*

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad (n-1),$$

abstraction faite de l'ordre.

Soient

$$r_1,\quad r_2,\quad r_3,\quad \ldots,\quad r_n$$

les résidus respectifs de c, $c+a$, ..., $c+(n-1)a$, par rapport au module n, 0 étant remplacé par son équivalent n.

Considérons un échiquier de n cases de côté.

Numérotons de 1 à n les rangées (sens horizontal) de haut en bas et les colonnes (sens vertical) de gauche à droite. Dans les rangées 1, 2, 3, ..., n, marquons suc-

cessivement les cases situées dans les colonnes r_1, r_2, r_3, ..., r_n.

Fig. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

L'ensemble des cases ainsi marquées est une *ligne arithmétique* de pas *a*.

Dans l'arithmétique de l'échiquier, la dernière propriété s'exprime sous cette forme :

Sur un échiquier de côté n, les n cases d'une ligne arithmétique de pas a sont réparties dans chacune des n rangées et chacune des n colonnes, lorsque les nombres n et a sont premiers entre eux.

Voici les trois propriétés fondamentales des lignes arithmétiques :

I. *Deux lignes arithmétiques de même pas se confondent ou n'ont aucune case commune.*

Cela est évident, puisque dans chaque rangée la différence des numéros d'ordre des cases occupées par la première et la seconde ligne arithmétique demeure congrue à un même nombre, pour le module n.

On dit que deux lignes de même pas ont la *même direction.*

Les n^2 cases d'un échiquier de côté n peuvent être réparties entre n lignes arithmétiques de même direction.

Si dans chaque ligne on porte un même nombre dans toutes les cases, on obtient un *abaque magique*.

Ce mode de répartition trouve son emploi dans la théorie des carrés magiques, diaboliques et cabalistiques.

II. *Deux lignes arithmétiques de pas différents,* ***a et a'***,

$$c,\quad c+a,\quad c+2a,\quad \ldots,\quad c+(n-1)a,$$
$$c',\quad c'+a',\quad c'+2a',\quad \ldots,\quad c'+(n-1)a'$$

ont une case commune et une seule, lorsque la différence de leurs pas $(a-a')$, *est un nombre premier avec le côté* n *de l'échiquier.*

Dans les rangées successives

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n,$$

les différences entre les numéros d'ordre des deux cases occupées par les deux lignes arithmétiques sont respectivement égales aux résidus, par rapport au module n, des n termes de la progression arithmétique

$$(c-c'),\quad (c-c')+(a-a'),$$
$$(c-c')+2(a-a'),\quad \ldots\quad (c+c')+(n-1)(a-a'),$$

dont la raison est un nombre premier avec n.

Et l'on sait que parmi ces résidus il y en a un, et un seul, égal à zéro. La propriété se trouve démontrée.

Les colonnes sont des lignes arithmétiques de pas zéro. Les rangées, qui deviennent des colonnes quand on change le point de vue sont aussi des lignes arithmétiques.

On voit immédiatement que, sur un échiquier de côté n, le nombre des directions différentes est égal à $(n+1)$.

III. *Sur un échiquier dont le côté est un nombre premier n, par deux cases quelconques passe une ligne arithmétique et une seule.*

Sur cet échiquier, la différence des pas de deux lignes arithmétiques est un nombre premier avec le côté, et, par conséquent, deux lignes arithmétiques de pas différents ne peuvent avoir deux cases communes.

D'autre part, par la première case on peut mener $(n+1)$ lignes arithmétiques, une ligne horizontale ou verticale, et n autres qui passent successivement par les n cases de la rangée ou de la colonne dans laquelle se trouve la seconde case; autrement ces deux lignes arithmétiques de pas différents auraient deux cases communes.

Donc, par la première case on peut mener une ligne arithmétique et une seule qui passe par la seconde.

Sur le plan, par deux points passe une ligne droite et une seule, et par un point pris en dehors d'une ligne droite on peut mener une ligne droite, et une seule, qui ne la rencontre pas.

Pareillement, sur l'échiquier de côté premier, par deux cases passe une ligne arithmétique et une seule, et par une case prise en dehors d'une ligne arithmétique on peut mener une ligne arithmétique et une seule qui ne la rencontre pas, la ligne de même pas.

Sur l'échiquier de côté premier n, écrivons les $(n-1)$ premiers nombres entiers dans les $(n-1)$ premières cases de la première rangée, en suivant l'ordre naturel, puis portons le nombre 1 dans les cases de la ligne arithmétique de pas 1 menée par la case 1, le nombre 2 dans les cases de la ligne de pas 2 menée par la case 2, et ainsi de suite jusqu'au nombre $(n-1)$, qui sera mis

dans les cases de la ligne de pas $(n - 1)$ menée par la case $(n - 1)$.

Toutes ces lignes arithmétiques aboutissent à la case commune à la dernière colonne et à la dernière rangée; les autres cases de ces dernières lignes sont vides.

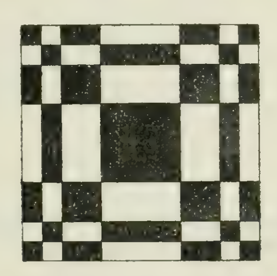
Supprimons ces deux lignes, il reste un échiquier de côté $(n - 1)$ contenant un nombre dans chaque case.

Dans cet abaque, *le produit du nombre d'une case quelconque par le nombre de sa rangée a pour résidu, par rapport au module n, le nombre de sa colonne.*

Ce mode de répartition en lignes arithmétiques concourantes trouve son emploi dans la théorie des nombres premiers.

Formons l'abaque avec des cases noires et blanches, de telle sorte que les cases noires renferment les résidus

Fig. 2.



quadratiques pour le module n, et les cases blanches les résidus non quadratiques.

La disposition des cases noires et blanches dans cette mosaïque, que j'appellerai *échiquier quadratique,* révèle les propriétés principales des résidus quadratiques.

[Q4bα]

CURIOSITÉ MATHÉMATIQUE;

Par M. G. TARRY.

Dans l'un quelconque de ces deux abaques, multiplions par 15 le nombre de chaque case, puis ajoutons à ce produit le nombre de la case correspondante de l'autre abaque, augmenté de l'unité.

Fig. 1.

4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10
3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13
2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11
14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1
12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0
4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10
3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13
2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11
14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1
12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0
4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10	4	7	10
3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13	3	5	13
2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11	2	8	11
14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1	14	6	1
12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0	12	9	0

Fig. 2.

12	14	2	3	4	12	14	2	3	4	12	14	2	3	4
9	6	8	5	7	9	6	8	5	7	9	6	8	5	7
0	1	11	13	10	0	1	11	13	10	0	1	11	13	10
12	14	2	3	4	12	14	2	3	4	12	14	2	3	4
9	6	8	5	7	9	6	8	5	7	9	6	8	5	7
0	1	11	13	10	0	1	11	13	10	0	1	11	13	10
12	14	2	3	4	12	14	2	3	4	12	14	2	3	4
9	6	8	5	7	9	6	8	5	7	9	6	8	5	7
0	1	11	13	10	0	1	11	13	10	0	1	11	13	10
12	14	2	3	4	12	14	2	3	4	12	14	2	3	4
9	6	8	5	7	9	6	8	5	7	9	6	8	5	7
0	1	11	13	10	0	1	11	13	10	0	1	11	13	10
12	14	2	3	4	12	14	2	3	4	12	14	2	3	4
9	6	8	5	7	9	6	8	5	7	9	6	8	5	7
0	1	11	13	10	0	1	11	13	10	0	1	11	13	10

Nous obtiendrons un carré diabolique de côté 15, formé avec les 15^2 premiers nombres entiers.

On remarquera que le même rectangle sert de générateur dans les deux abaques.

Cette solution est un cas particulier de mes méthodes générales de construction des carrés diaboliques impairs de côté $3n$.

[D2aα]

DÉMONSTRATION NOUVELLE DE LA RÈGLE DE CONVERGENCE DE GAUSS;

Par M. GODEFROY,
Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille.

La règle de convergence de Gauss peut s'énoncer :

Si dans une série positive le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + an^{p-1} + a_1 n^{p-2} + \ldots - a_{p-1}}{n^p + bn^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \ldots + b_{p-1}},$$

les termes décroissent constamment à partir d'un certain rang et tendent vers zéro pour $b - a > 0$, *ils finissent par augmenter indéfiniment pour* $b - a < 0$, *et ont une limite non nulle pour* $b - a = 0$; *la série est convergente quand on a* $b - a > 1$; *dans tous les autres cas elle est divergente.*

Si l'on pose

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \alpha_n$$

et que l'on remplace $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ par sa valeur, on trouve pour $n\alpha_n$ une fraction rationnelle dont les deux termes sont de degré p; en effectuant la division et limitant le quotient à son premier terme $b - a$, l'expression $n\alpha_n$ peut donc se mettre sous la forme

$$n\alpha_n = b - a + \frac{\lambda}{n}\varphi(n),$$

λ désignant une constante et $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$.

I. Soit d'abord $b - a > 0$, le nombre α_n finissant par devenir positif, les termes vont en décroissant à partir d'un certain rang; d'autre part, k étant un nombre compris entre zéro et $b - a$ pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 + \frac{k}{m},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 + \frac{k}{m+1} \quad \cdots \quad \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 + \frac{k}{n-1},$$

d'où

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 + \frac{k}{m}\right)\left(1 + \frac{k}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{n-1}\right),$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 + k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right);$$

m restant fixe, le second membre de cette inégalité croît au delà de toute limite, lorsque n augmente indéfiniment; par suite, u_n tend vers zéro.

II. Soit maintenant $b - a < 0$, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ se trouve dans les mêmes conditions que la série de terme général u_n dans l'hypothèse précédente, ses termes à partir d'un certain rang, vont donc en décroissant et tendent vers zéro; par suite, ceux de la série considérée finissent par augmenter indéfiniment.

III. Soit enfin $b - a = 0$, on trouve alors que $n^2 \alpha_n$ peut se mettre sous la forme

$$n^2 \alpha_n = b_1 - a_1 + \frac{\lambda}{n} \varphi(n),$$

λ désignant encore une constante et $\varphi(n)$ une fraction dont la limite est l'unité ou zéro pour $n = \infty$. Si l'on

suppose $b_1 - a_1 < 0$, le nombre x_n finissant par devenir négatif, les termes vont en croissant à partir d'un certain rang; d'autre part, k étant un nombre supérieur à $a_1 - b_1$ pour une valeur de n suffisamment grande m, on aura

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} > 1 - \frac{k}{m^2},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1 - \frac{k}{(m+1)^2} \cdots \frac{u_{n-1}}{u_n} > 1 - \frac{k}{(n-1)^2},$$

d'où, comme on peut supposer m supérieur à k,

$$\frac{u_m}{u_n} > \left(1 - \frac{k}{m^2}\right)\left[1 - \frac{k}{(m+1)^2}\right]\cdots\left[1 - \frac{k}{(n-1)^2}\right],$$

et à plus forte raison

$$\frac{u_m}{u_n} > 1 - k\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots\right];$$

or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, on peut toujours prendre m assez grand pour que le coefficient de k soit inférieur à un nombre positif déterminé σ plus petit que $\frac{1}{k}$; on a dès lors

$$u_n < \frac{u_m}{1 - k\sigma},$$

m restant fixe, u_n reste toujours inférieur à un nombre déterminé et fini, lorsque n augmente indéfiniment; comme il croît constamment, il a donc une limite inférieure ou au plus égale à ce nombre et, par suite, non nulle. Il en est de même si l'on suppose $b_1 - a_1 > 0$, car, en considérant la série de terme général $\frac{1}{u_n}$, ses termes, d'après ce qu'il vient d'être dit, croissent

à partir d'un certain rang et tendent vers une limite non nulle, ceux de la série considérée finissent donc par décroître constamment et tendent aussi vers une limite non nulle.

Il résulte de ce qui précède que le seul cas où la série puisse être convergente est celui où l'on a $b - a > 0$; si l'on applique alors la règle de Raabe, comme la limite de $n\alpha_n$ pour $n = \infty$ est égale à $b - a$, on en conclut que la série est convergente pour $b - a > 1$ et divergente pour $b - a < 1$; elle est encore divergente pour $b - a = 1$; en effet, dans ce cas, en désignant par $1 + \beta_n$ le produit $n\alpha_n$, la limite de $n\beta_n$ est égale à λ ou à zéro. La série n'est donc convergente que si l'on a $b - a > 1$.

Bibliographie.

Gauss (*Carl Friedrich Gauss Werke*, t. III, p. 139-144).

J. Bertrand (*Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. I, p. 240-244).

Eugène Rouché (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. V, p. 10-14; 1866).

Baillaud (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. VI, p. 189-192; 1869).

Charles Brisse (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. IX, p. 36-37; 1870).

Anonyme (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. IX, p. 111-112; 1870).

A. de Saint-Germain (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIV, p. 212-215; 1890).

Ch. Méray (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. III, p. 33-41; 1893).

[R7bβ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT SOLLICITÉ PAR UNE FORCE CENTRALE CONSTANTE;

Par M. LECORNU.

Je considère un point matériel M, de masse m; attiré par une force constante mF émanée d'un point fixe. Prenant celui-ci comme origine, j'appelle r et θ les coordonnées polaires du point M. Soit v la vitesse de M et soit p la distance de l'origine à la tangente à la trajectoire. Le théorème des aires donne immédiatement

$$pv = C_1,$$

C_1 désignant une constante. Le théorème des forces vives donne de son côté

$$v^2 + 2Fr = C_2,$$

C_2 étant une autre constante. En éliminant v et posant

$$\frac{C_1^2}{2F} = k^3, \qquad \frac{C_2}{2F} = h,$$

on obtient la relation

$$(1) \qquad p^2(h - r) = k^3.$$

D'ailleurs, si α est l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on a

$$p = r \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

On déduit de là l'équation différentielle de la trajectoire

$$(2) \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h - r) - k^3}}.$$

L'équation $r^2(h-r)-k^3=0$ a toujours une racine négative, que nous appellerons $-R$. Les deux autres racines sont réelles et positives si $4h^3-27k^3>0$. Je dis que cette condition est toujours remplie. Comme h est égal à $\frac{v^2+2Fr}{2F}$ et k^3 égal à $\frac{p^2v^2}{2F}$, comme, de plus, p est toujours inférieur à r, il suffit de vérifier l'inégalité

$$(v^2+2Fr)^3-27F^2v^2r^2>0.$$

Or, si l'on pose

$$v^2=\lambda Fr,$$

le premier membre devient

$$F^3r^3(\lambda-1)^2(\lambda+8),$$

quantité manifestement positive pour toute valeur positive de λ (¹). Soient r_0, r_1 les deux racines positives. Admettons, pour fixer les idées, que r_0 soit inférieur à r_1. L'équation (2) devient

$$(3)\qquad d\theta=\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{(r_1-r)(r-r_0)(r+R)}}$$

avec les relations

$$R=\frac{r_0r_1}{r_0+r_1},\qquad h=r_0+r_1-R,\qquad k^3=r_0r_1R=\frac{r_0^2r_1^2}{r_0+r_1}.$$

On voit sans peine que r_0 et r_1 sont tous les deux inférieurs à h et que, si l'on trace les circonférences Γ_0 et Γ_1 de rayons r_0 et r_1, la trajectoire est tout entière comprise entre ces deux circonférences.

Le rayon de courbure est donné immédiatement par

(¹) Dans le cas particulier où $\lambda=1$, c'est-à-dire si $v^2=Fr$, le mouvement est circulaire et uniforme.

la formule connue

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

On trouve ainsi

$$(4) \qquad \rho = 2r\left(\frac{h-r}{k}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Comme r reste toujours inférieur à h, le rayon de courbure est partout fini et différent de zéro. On en déduit la forme de la trajectoire : c'est une courbe, assez semblable à l'herpolhodie, composée d'une suite d'arcs identiques, sans inflexion, allant alternativement toucher les circonférences Γ_0 et Γ_1.

Si l'on suppose que le centre d'attraction se trouve rejeté à l'infini, le mouvement devient, à la limite, parabolique. Dans cette transformation, la circonférence Γ_1 devient la tangente au sommet de la parabole ; la circonférence concentrique de rayon h devient la directrice. On a donc, en appelant q le paramètre de la parabole

$$\lim(h - r_1) = \lim(r_0 - \mathrm{R}) = \frac{q}{2}.$$

Mais $\mathrm{R} = \frac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}$. Donc

$$\lim \frac{r_0^2}{r_0 + r_1} = \frac{q}{2}.$$

Ceci montre que r_0 devient infini du même ordre que $\sqrt{r_1}$ et que $\frac{k^3}{r_1^2}$ a pour limite $\frac{q}{2}$.

On sait que, dans la parabole, si α est l'angle de la tangente avec l'axe, et ρ le rayon de courbure, on a

$$\rho \sin^3\alpha = q.$$

Dans le cas de notre trajectoire générale, on a

$$r^2(h - r)\sin^2\alpha = k^3.$$

d'où, en appliquant la formule (4) :

$$\rho \sin^3 \alpha = \frac{2k^3}{r^2}.$$

Par conséquent, *le produit* $\rho \sin^3 \alpha$ *varie en raison inverse du carré de la distance au centre.*

On sait aussi que, dans la parabole, si x est la distance d'un point à la directrice, on a

$$x \sin^2 \alpha = \frac{q}{2}.$$

Ici, pour avoir la formule correspondante, il faut poser $h - r = x$ et l'on trouve

$$x \sin^2 \alpha = \frac{k^3}{r^2}.$$

Donc *le produit* $x \sin^2 \alpha$ *varie également en raison inverse de* r^2.

Une troisième formule, qui se déduit des précédentes, est

$$\rho = \frac{2x}{\sin \alpha}.$$

Le rapport $\frac{x}{\sin \alpha}$ est évidemment la longueur de la partie de normale comprise entre la courbe et la tangente menée à la circonférence de rayon h, par le point où cette circonférence rencontre le prolongement du rayon vecteur r. Nous avons ainsi la généralisation de cette propriété connue : le rayon de courbure de la parabole est double de la normale limitée à la directrice.

L'équation différentielle (3) de la trajectoire conduit à une intégrale elliptique de troisième espèce. Il faudrait donc, pour faire une étude approfondie de la courbe, avoir recours à la théorie des fonctions elliptiques. Sans entrer dans cette voie, nous allons maintenant rechercher s'il ne serait pas possible d'obtenir un mode de

génération analogue à celui qui permet de déduire l'herpolhodie, courbe transcendante, de la polhodie, courbe algébrique.

Si $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ est l'équation de l'ellipsoïde roulant sur un plan fixe situé à la distance $\frac{1}{\sqrt{D}}$ du centre, le mouvement du pôle de Poinsot sur l'herpolhodie est défini par les deux équations

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = \mu \sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)D},$$

$$\rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2 - \sqrt{-abcD}).$$

Dans ces équations, on a posé

$$(5) \qquad a = -\frac{(B - D)(C - D)}{BCD}, \qquad b = \ldots, \qquad c = \ldots.$$

μ est une constante; ρ et χ sont les coordonnées polaires du point mobile. Si l'on suppose $A < B < C$, b est toujours positif; a est positif et c négatif, ou inversement, suivant que B est inférieur ou supérieur à D.

Posons

$$\chi = \mu t + \omega,$$

d'où

$$\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu\sqrt{-abcD}.$$

Par l'élimination de t, il vient

$$(6) \qquad d\omega = -\frac{d\rho}{\rho} \frac{\sqrt{-abc}}{\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}}.$$

Faisons maintenant la substitution $\rho^2 = r$, et nous avons

$$2\,d\omega = -\frac{dr}{r} \frac{\sqrt{-abc}}{\sqrt{-(r - a)(r - b)(r - c)}}.$$

En comparant avec l'équation (3), on reconnaît que

l'identification a lieu si l'on prend $\theta = -2\omega$ et

$$a = r_0, \qquad b = r_1, \qquad c = -R \qquad \text{pour } D > B,$$

ou bien

$$a = -R, \qquad b = r_1, \qquad c = r_0 \qquad \text{pour } D < B.$$

Comme nous devons avoir $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{R}$, il en résulte, en vertu des valeurs (5) la relation

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{D}.$$

Cette relation exprime que le carré de la distance du plan fixe au centre est égal à la somme des carrés des axes de l'ellipsoïde, ce qui détermine complètement la polhodie et l'herpolhodie.

Pour réaliser la transformation $\chi = \mu t + \omega$, il suffit de supposer que le point décrivant l'herpolhodie est, à chaque instant, projeté sur un plan horizontal qui tourne autour de la verticale du centre avec la vitesse angulaire μ (1). On peut imaginer que ce plan soit situé *au-dessus* du centre de l'ellipsoïde à la distance $\frac{1}{\sqrt{D}}$. Alors l'ellipsoïde lui est constamment tangent au point P′ diamétralement opposé au pôle P de Poinsot, et la trajectoire de P′ sur le plan tournant vérifie l'équation (6). Remarquons que, dans l'*herpolhodographe* de MM. Darboux et Kœnigs, on produit déjà la rotation constante, avec la vitesse angulaire μ, autour de la verticale du centre, et que, par suite, il suffirait de relier invariablement au

---

(1) Le mouvement obtenu en projetant ainsi le point de contact de l'ellipsoïde sur un plan tournant avec la vitesse μ est, par rapport à ce plan, le mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale ayant une expression de la forme $\alpha\rho + \beta\rho^3$ (*voir* DARBOUX, *Mécanique de Despeyrous*, Note XVII).

système tournant le plan horizontal tangent supérieurement à l'ellipsoïde pour obtenir la génération mécanique de la courbe (6). Il reste ensuite à faire subir à cette courbe la transformation $\rho^2 = r$, $2\omega = -\theta$. Si l'on pose

$$Z = \rho e^{i\omega}, \qquad z = re^{-i\theta},$$

cette transformation, qui n'altère pas l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, revient à établir la correspondance $Z^2 = z$. Il est aisé d'imaginer un appareil propre à réaliser cinématiquement cette correspondance.

Au lieu d'un ellipsoïde, on peut prendre comme surface roulante un cône, et le mode de génération se trouve alors simplifié.

Considérons, en effet, le cône

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

et la quartique gauche, intersection de ce cône avec l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -abc$$

(cette quartique peut être regardée comme la limite d'une polhodie tracée sur un hyperboloïde qui dégénère en cône).

Si le cône roule sur l'un de ses plans tangents, la quartique roule sur une courbe dont l'équation différentielle est précisément l'équation (6). On voit qu'ici il n'y a plus à faire intervenir de rotation.

Pour vérifier ce résultat, il suffit de partir des équations

$$x^2 = \alpha(\rho^2 - a), \qquad y^2 = \beta(\rho^2 - b), \qquad z^2 = \gamma(\rho^2 - c),$$

dans lesquelles

$$\alpha = \frac{bc(b-c)}{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}, \qquad \beta = \ldots,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad \gamma = \ldots$$

Ces équations équivalent à celles de la quartique.

Si l'on calcule ds en fonction de ρ et de $d\rho$ par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et si l'on tient compte de la relation

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

on retrouve l'équation (6).

Le problème qui nous occupe est évidemment un cas limite de celui du mouvement d'un point pesant sur un cône de révolution à axe vertical; il suffit, pour passer du cône au plan, d'imaginer que le cône s'aplatit indéfiniment en même temps que l'intensité de la pesanteur augmente de manière à conserver pour la composante tangentielle une grandeur finie. Le mouvement conique peut d'ailleurs être étudié à peu près comme le mouvement plan; l'équation différentielle (2) de la trajectoire demeure applicable en considérant θ comme l'angle du plan méridien mobile avec un plan fixe, et r comme la distance du point mobile au sommet. Si l'on veut que $d\theta$ soit l'angle de deux génératrices consécutives, il faut écrire

$$\sin i \, d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h - r) - k^3}}$$

(i désignant l'angle des génératrices avec l'axe).

On construirait cette trajectoire en faisant subir à la trajectoire plane qui correspond aux mêmes valeurs de h et k la transformation qui consiste à changer θ en $\theta \sin i$, puis en enroulant le plan sur la surface du cône.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'il s'agissait d'une force attractive. Examinons rapidement le cas d'un mouvement plan dû à une force répulsive, centrale et

constante. Il est aisé de voir que l'équation différentielle de la trajectoire est

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{k^3}{r^2(h+r) - k^3}}.$$

La constante k est toujours positive. La constante h peut être positive, nulle ou négative, mais la somme $h+r$ demeure toujours positive. L'équation

$$r^2(h+r) - k^3 = 0$$

a une, et une seule, racine positive r_0. Si l'on construit la circonférence de rayon r_0, la trajectoire est tangente extérieurement à cette circonférence et présente à peu près l'aspect d'une branche d'hyperbole.

Les propositions, que nous avons énoncées comme généralisation de celles de la parabole, subsistent sans grande modification.

Observons seulement que, dans le cas particulier où la constante h est nulle, la circonférence directrice, de rayon h, se trouve réduite à un point. On a alors

$$r \sin^3\alpha = k^3 \qquad \text{et} \qquad \rho \sin\alpha = 2r.$$

Cette dernière égalité montre que *le rayon de courbure est double de la normale, limitée à la perpendiculaire menée par l'origine sur le rayon vecteur.*

Si l'on cherche à décrire la trajectoire, comme pour le cas de la force attractive, en faisant rouler une surface du second degré sur un plan, on est conduit à des résultats imaginaires.

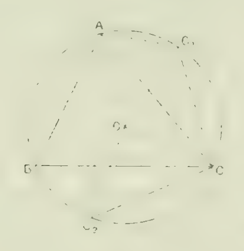
[K2a]

SUR UN THÉORÈME CONNU ;

Par M. Giacomo CANDIDO, à Pise.

Le but de ce petit article est de remarquer comment, par une très simple généralisation du théorème suivant, s'obtiennent quelques autres propositions d'une certaine importance : *Par le sommet* A *d'un triangle* ABC *on mène les perpendiculaires aux côtés* AB, AC, *qui coupent en* D *et en* E *le cercle circonscrit au triangle. Démontrer que le quadrilatère* ADBE (*ou* ADCE) *est équivalent au triangle* ABC (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 494) (A).

Considérons le triangle ABC, son cercle circonscrit et les droites AY, BY, CY, conjuguées isogonales de trois



droites quelconques AX, BX, CX par rapport aux trois angles ABC, lesquelles coupent le cercle circonscrit respectivement en A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2. On a alors

$$\widehat{C_1AC_2} = \pi - \gamma - 2\theta, \qquad \widehat{CC_1A} = \pi - \beta, \qquad \widehat{AC_2C} = \beta,$$

$$\widehat{BCA} = \gamma + 2\theta \qquad \left(\theta = \widehat{BCC_2} = \widehat{C_1CA}\right)$$

(on observera que les AX, AY ont été prises internes aux

angles, mais il va sans dire que ce serait la même chose si AX, AY étaient externes). De ce qui précède,

$$\widehat{C_1OC} = 2(\beta - \theta), \qquad \widehat{COC_2} = 2(\alpha - \theta),$$

$$\widehat{AOC_1} = 2\theta, \qquad \widehat{AOC_2} = 2(\gamma - \theta).$$

D'après ces formules, on a évidemment

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{aire } CC_1AC_2 = \frac{R^2}{2}[&\sin 2\theta - \sin 2(\alpha - \theta) \\ &+ \sin 2(\beta - \theta) + \sin 2(\gamma - \theta)]. \end{aligned} \right.$$

Observons d'abord que la valeur de (1) ne s'altère pas en changeant α avec β, et, par suite, les équivalences suivantes ont lieu en même temps :

$$\text{aire } CC_1AC_2 = CC_1BC_2 = Q_1,$$
$$\text{aire } AA_1CA_2 = AA_1BA_2 = Q_2,$$
$$\text{aire } BB_1CB_2 = BB_1AA_2 = Q_3.$$

Écrivons

$$\frac{R^2}{2}[\sin 2\theta - \sin 2(\alpha - \theta) + \sin 2(\beta - \theta) + \sin 2(\gamma - \theta)] = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma ;$$

on voit d'abord que cette équation est vérifiée par

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

ce qui démontre le théorème (A). On observe que la même chose peut se démontrer pour Q_2 et Q_3, et, par conséquent : *Si les isogonalités en* A, *en* B *et en* C *sont respectivement* $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$, *on a*

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = S.$$

Remarques. — I. On voit facilement que la condition d'isogonalité indiquée dans ce théorème conduit à la réduction des points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, à trois seu-

lement, qui, avec les trois sommets du triangle, nous donnent un hexagone inscrit qui a quelques propriétés remarquables. Par exemple : *Les angles et les côtés de cet hexagone sont respectivement égaux entre eux. Cet hexagone est équivalent au double du triangle fondamental.*

II. *En posant* $A_1A_2 = l_a$, $B_1B_2 = l_b$, $C_1C_2 = l_c$, *il existe une isogonalité particulière pour laquelle, parmi les rectangles* al_a, bl_b, cl_c, *il y en a un équivalent à la somme des deux autres.* Les droites conjuguées isogonales AA_1, AA_2, ... sont en ce cas les hauteurs et les droites qui joignent les sommets du triangle au centre du cercle circonscrit.

Ces deux remarques seront vérifiées aisément par le lecteur.

Rappelons maintenant le théorème suivant : *Si de deux points* X *et* Y *de deux droites conjuguées isogonales par rapport à un angle* BAC *on abaisse des perpendiculaires* XM, YN, XP, YQ *sur les côtés,* MP *est perpendiculaire à* AY *et* NQ *à* AX.

Considérons alors les droites de Wallace (ou de Simson) des points A_1 et A_2, et, par le théorème précédent, on voit facilement que l'angle qu'elles font entre elles (celui-ci opposé à A) est égal à $\pi - A - 2\theta$; d'où cette proposition.

Pour que les deux droites de Wallace des points A_1 *et* A_2 *soient rectangulaires entre elles, il faut que l'isogonalité soit* $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$.

D'ailleurs, pour cette condition d'isogonalité, on a

$$2\theta + A = \frac{\pi}{2},$$

et ceci nous conduit à la proposition de M. Goffart (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 397) : *Les droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit à un triangle donné sont rectangulaires entre elles.*

[C2h]

SUR LE SECOND THÉORÈME DE LA MOYENNE;

PAR M. TIKHOMANDRITZKY.

On démontre le second théorème de la moyenne, appartenant à M. Bonnet, indépendamment du premier (*voir* les *Cours* de M. Jordan et de M. Demartres); cependant, dans le cas où le facteur de la fonction à intégrer, lequel varie dans le même sens entre les limites de l'intégrale, admet une dérivée, le second théorème de la moyenne n'est qu'un simple corollaire du premier. Comme je ne sais pas si cette remarque a été faite avant moi, je vais le montrer ici.

Soit donnée l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$f(x)$ variant dans le même sens lorsque x croît de x_0 à X et admettant une dérivée $f'(x)$. En intégrant par parties, on aura

$$(2) \qquad I = \left[f(x) \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \right]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx,$$

ou

$$(3) \qquad I = f(X) \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx.$$

Mais, $f'(x)$ conservant son signe entre les limites de l'intégrale, car $f(x)$ varie toujours dans le même sens d'après notre supposition, on aura, par le premier théorème de la moyenne,

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx\,[f(X)-f(x_0)],$$

ξ désignant une quantité comprise entre x_0 et X,

$$(5)\qquad x_0 < \xi < X.$$

En portant la valeur (4) de l'intégrale dans l'équation (3), on aura [en remplaçant de plus I par sa valeur (1)]

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = f(X)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx - [f(X)-f(x_0)]\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

En ouvrant les parenthèses, on réduit de suite cette formule à la forme de Weierstrass (suivant M. Demartres),

$$(7)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx + f(X)\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\,dx,$$

et en ajoutant et en retranchant une même quantité facile à voir, on la ramène à la première forme de M. Jordan (p. 90, t. II, 1re édit.),

$$(8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = f(x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx + [f(X)-f(x_0)]\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

Enfin, en transposant à gauche le premier terme du

second membre de la même équation (6), et en posant

$$(9) \qquad f(x) - f(X) = \psi(x),$$

ce qui donnera une fonction conservant son signe entre les limites de l'intégrale, on aura la formule de M. Bonnet (*voir* Demartres, Ire Partie, p. 109),

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(x_0)\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx.$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Lyon.

Analyse.

I. *On considère les courbes* C *définies par les équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \cos t - \varphi(t)\sin t, \\ y = \sin t - \varphi(t)\cos t, \\ z = \quad t \quad - \varphi(t). \end{cases}$$

Former, entre la variable t *et la fonction inconnue* $\varphi(t)$, *l'équation différentielle du second ordre* E, *laquelle exprime que la normale principale à* C *est parallèle à la droite* D

$$x = z\sin t, \qquad y = -z\cos t.$$

E *devient du troisième ordre et linéaire quand on pose*

$$\varphi = -\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dt}.$$

Intégrer et montrer que les diverses courbes C, fournies par les diverses intégrales, sont les géodésiques d'une certaine surface Σ. Étudier Σ et ses lignes de courbure.

Si dans les équations (1) on envisage φ comme une seconde variable indépendante, on a un hélicoïde développable Σ. La génératrice a pour cosinus directeurs

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'arête de rebroussement est l'hélice H

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t.$$

C est évidemment située sur Σ. La longueur de génératrice comprise entre C et H est $-\varphi\sqrt{2}$. Cela fournit la signification géométrique des deux *cordonnées* t et φ d'un point sur Σ. La normale à Σ est parallèle à la droite D. C sera géodésique dès que son plan osculateur passera par la normale. On a ainsi la condition [différentiant le système (1)]

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & \sin t \\ y'' & y' & -\cos t \\ z'' & z' & 1 \end{vmatrix} = \varphi(\varphi - 2\varphi'') + 2(1+\varphi')(1+2\varphi') = 0.$$

C'est l'équation E qui devient, pour $\varphi = -\frac{\psi}{\psi'}$ et tout calcul fait,

$$2\psi''' + \psi' = 0.$$

De là

$$\psi = a + b\cos\frac{t - t_0}{\sqrt{2}},$$

(2) $$\varphi = \frac{C}{\sin\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\cot\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}.$$

(2) fournit, avec les deux paramètres arbitraires c et t_0, les géodésiques C de Σ.

Sur la développable Σ, les lignes de courbure sont, outre les génératrices, encore les trajectoires orthogonales des génératrices, c'est-à-dire les courbes

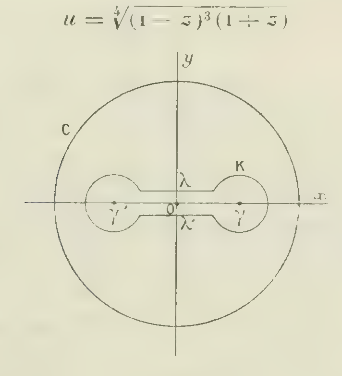
$$\varphi = \text{const.},$$

en vertu de la signification géométrique de φ.

II. *On envisage, dans le plan de la variable complexe* z, *l'origine* O *des coordonnées, le cercle* C *de rayon* R *et de centre* O, *les deux points* γ, $z = 1$ *et* γ', $z = -1$; *enfin un contour* K *ainsi défini : deux arcs de cercle décrits autour de* γ *et* γ' *comme centres avec le rayon* ρ *et reliés par deux parallèles* λ *et* λ' *à l'axe des* x.

Démontrer : 1° *que la fonction*

$$u = \sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$$



est uniforme dans le champ compris entre K *et* C;
2° *que la valeur de l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \int \frac{dz}{u},$$

prise le long de C, *est indépendante de* R.

Calculer I *et exprimer au moyen de* I *l'intégrale réelle*

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)}},$$

prise de γ' *à* γ *le long de l'axe des* x.

On vérifie immédiatement que : 1° les seuls points de ramification sont γ et γ'; 2° l'élément de I est multiplié par $-i$, $i = \sqrt{-1}$, quand z fait le tour de γ; 3° les résidus de I afférents à γ et γ' sont nuls.

Pour calculer I_C on fera $R = \infty$, ce qui réduit I_C à

$$\int_C \frac{dz}{z\sqrt[4]{-1}} = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-1}}.$$

Intégrons, en partant de γ' et y revenant le long du contour K avec ρ infiniment petit; on aura

$$J(1+i) = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-1}},$$

$$J = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-(1+i)^4}} = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{4}} = \pi\sqrt{2}.$$

Mécanique.

I. *Soit* P *un paraboloïde de révolution, dont l'équation, en coordonnées semi-polaires*

$$z, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \text{arc tang}\frac{y}{x},$$

est

$$r^2 = 2pz.$$

Sur P *se meut sans frottement un point* M, *de masse un, attiré vers le sommet de* P *par une force proportionnelle à la distance.*

Construire et discuter les projections sur xy *des*

trajectoires, en supposant la vitesse initiale tangente au parallèle de départ.

Cas où le paramètre p augmente indéfiniment.

Appliquer les théorèmes des aires et des forces vives. Quand $p = \infty$, P se réduit à un plan ; les trajectoires sont des ellipses ayant leur centre à l'origine, ce qui s'aperçoit *a priori*.

II. *Une droite* D *roule sur une circonférence* C *avec une vitesse instantanée constante* ω_1. C *de son côté tourne, avec une vitesse angulaire constante* ω, *autour d'un de ses points fixes* O. *Construire les roulettes fixe et mobile qui interviennent dans le mouvement absolu de* D. *Cas* $\omega + \omega_1 = 0$.

Composition de deux rotations. La roulette mobile est une circonférence tangente à C en O. Le cas $\omega + \omega_1 = 0$ fournit une translation.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

Épreuve écrite. — 1° *Les lettres* p, q, r, s, t *désignant, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction* z *qui dépend des deux variables* x *et* y, *démontrer que, pour toute surface développable, les trois expressions*

$$z - px - qy, \quad p, \quad q$$

sont fonctions d'une seule d'entre elles, et que l'on a la relation

$$rt - s^2 = 0.$$

Démontrer les réciproques.

2° *Quelles sont les surfaces dont les lignes de pente sont des lignes de courbure?*

Les coordonnées sont supposées rectangulaires.

2° On a à la fois

$$dz = p\,dx + q\,dy = 0,$$
$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz};$$

on en déduit évidemment

$$p\,dp + q\,dq = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{const.}$$

Puisque p est fonction de q, les surfaces sont développables.

Ce sont donc les enveloppes d'un plan mobile qui se déplace en faisant un angle constant avec le plan horizontal.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'équation différentielle*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} - \beta xy = 0,$$

où α et β sont des constantes dont la première α est positive, admet une intégrale représentée par une série convergente de Maclaurin.

Déterminer la loi des coefficients et étudier la série

$$y = y_0\left[1 + \frac{\beta x^2}{(1+\alpha)\times 2} + \frac{\beta^2 x^4}{(1+\alpha)(3+\alpha)\times 2\times 4} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^n x^{2n}}{(1+\alpha)(3+\alpha)\ldots(2n-1+\alpha)\times 2\times 4\times\ldots\times 2n} + \ldots\right].$$

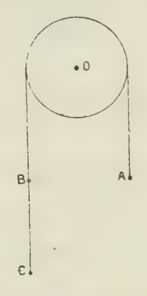
Pour étudier cette série, on forme le rapport d'un terme au précédent.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical un disque homogène de poids* P *peut tourner autour de son centre* O *qui est fixe.*

Sur ce disque est enroulé un fil flexible, inextensible et sans masse dont les extrémités pendent verticalement de chaque côté du disque. Le fil ne peut pas glisser sur le disque.

A l'extrémité A *du fil est attaché un poids* P *égal au poids du disque. A l'autre extrémité* B *du fil est attaché un fil élastique* BC *dont on néglige la masse, et dont la longueur, à l'état naturel, est égale au rayon du disque. Ce fil élastique porte à son extrémité* C *un poids* P *égal au poids qui est en* A.



Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension, et il double de longueur sous l'action d'une tension égale à P.

Trouver le mouvement du système, sachant qu'il n'y a pas de vitesse initiale et qu'au commencement du mouvement le fil élastique est à l'état naturel.

La longueur du fil non élastique est telle qu'au commencement les points A *et* B *sont sur une même horizontale située à une distance du point* O *plus grande que le diamètre.*

Soient :

M la masse de chacun des poids et du disque ;
R le rayon du disque ;
T et T′ les tensions ;
x la distance BC ;
θ l'angle dont le disque tourne du côté du point A.

On a, au point A,

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = P - T,$$

au point C

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} - M\frac{d^2x}{dt^2} = T' - P.$$

pour le disque

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = (T - T')R,$$

pour la longueur du fil élastique

$$x = R\left(1 + \frac{T'}{R}\right).$$

De ces quatre équations, on tire facilement

$$5R\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

et, puisque les vitesses initiales sont nulles,

$$5R\frac{d\theta}{dt} - 2\frac{dx}{dt} = 0,$$

d'où, en vertu des conditions initiales,

$$5R\theta - 2x = -2R;$$

ensuite on a

$$\frac{3}{5}M\frac{d^2x}{dt^2} = P - P\frac{x - R}{R},$$

d'où facilement

$$x = R\left(2 - \cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

La longueur x varie donc de R à 3R.

On a alors

$$R\theta = \frac{2}{5}R\left(1 - \cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

Le point A commence donc par descendre (et le point B par remonter). Le point A s'abaisse de $\frac{4}{5}$R, puis revient au point de départ.

Enfin, pour le point C, on a

$$x - R\theta = \frac{1}{5}R\left(8 - 3\cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

Donc le point C descend d'abord, s'abaisse de $\frac{6}{5}$R au-dessous de sa position initiale et revient au point de départ.

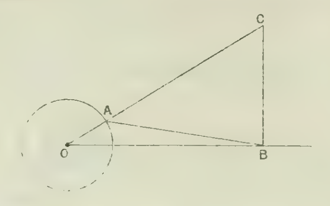
Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA *dont la longueur est égale à* 1^m *tourne uniformément autour de son extrémité* O *qui est fixe, en faisant cinq tours par minute.*

A cette manivelle s'articule en A *une bielle* AB, *dont la longueur est* 3^m *et dont l'extrémité* B *glisse sur une droite fixe* Δ *dont le prolongement passe par* O.

On demande de déterminer graphiquement les vitesses du point B *au moyen d'une courbe dont les abscisses seraient les positions de* B *et dont les ordonnées seraient les vitesses correspondantes à ces positions.*

Le centre instantané de rotation de la bielle AB est

au point C rencontre du rayon OA et de la perpendiculaire BC à la droite Δ.



Soient :

ω la vitesse angulaire de OA ;
φ la vitesse angulaire de la rotation de la bielle ;
v la vitesse du point B sur la droite A.

On aura

$$\text{OA} \times \omega = \text{CA} \times \varphi,$$
$$v = \text{CB} \times \varphi ;$$

on aura donc pour la vitesse

$$v = \text{OA} \times \omega \times \frac{\text{CB}}{\text{CA}}.$$

On peut, par suite, construire la courbe demandée facilement point par point.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Indiquer la série des opérations nécessaires pour mesurer un arc de méridien.*

Admettant que le sphéroïde terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de la ligne des pôles, montrer qu'il suffit de connaître les longueurs de deux arcs de méridien situés à des latitudes différentes, pour en déduire la forme et les dimensions de ce méridien.

Comment traite-t-on un ensemble d'observations?

La valeur adoptée pour le mètre étalon est-elle trop forte ou trop faible?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant données l'ascension droite et la déclinaison de la Lune à* 0^h, 4^h, 8^h, 12^h *et* 16^h (*temps moyen de Paris*) *pour une certaine date; sachant en outre que la longitude orientale de Marseille, par rapport au méridien de Paris, est de* $12^m 13^s,6$; *on demande de calculer l'ascension droite et la déclinaison de la Lune à l'heure t, de la même date, t étant exprimé en temps moyen de Marseille.*

Données numériques.

1898
novembre 20

à	α.	δ.
h	h m s	° ′ ″
0........	21.45.39,09	−9.32.16,2
4........	21.54.17,27	−8.37.30,4
8........	22. 2.51,27	−7.42.12,1
12........	22.11.21,39	−6.46.26,6
16........	22.19.47,91	−5.50.18,9

$t = 2.40.32,8$ (temps moyen de Marseille).

	α.	Δ¹.	Δ².	Δ³.	Δ⁴.
h	h m s	m s	s	s	s
0...	21.45.39,09	+ 8.38,18	− 4,18	+ 0,30	− 0,02
4...	21.54.17,27	+ 8.34,00	− 3,88	+ 0,28	
8...	22. 2.51,27	+ 8.30,12	− 3,60		
12...	22.11.21,39	+ 8.26,52			
16...	22.19.47,91				

	δ.				
	° ′ ″	′ ″	″	″	
0...	− 9.32.16,2	+ 54.45,8	+ 32,5	− 5,3	+ 0,3
4...	− 8.37.30,4	+ 55.18,3	+ 27,2	− 5,0	
8...	− 7.42.12,1	+ 55.45,5	+ 22,2		
12...	− 6.46.26,6	+ 56. 7,7			
16...	− 5.50.18,9				

$$u = u_0 + \frac{s}{1}\Delta u_0 + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0$$
$$= u_0 + A_1\Delta^1 + A_2\Delta^2 + A_3\Delta^3 + A_4\Delta^4.$$

t (en temps moyen de Marseille)	$= 2^h.40^m.32^s,8$
Différence de longitude	$= 12.13,6$
t (en temps moyen de Paris)	$= 2.28.19,2$

Log.		Log.	
s	$\bar{1},79099$	A_1...	$+\bar{1},79099$
$(s-1):2$....	$-\bar{1},2810$	A_2...	$-\bar{1},0720$
$(s-2):3$....	$-\bar{1},663$	A_3...	$+\bar{2},735$
$(s-3):4$....	$-\bar{1},77$	A_4..	$-\bar{2},50$

Log.	α.	δ.
Δ^1	$+2,71448$	$+3,51664$
A_1	$+\bar{1},79099$	$-\bar{1},79099$
$A_1\Delta_1$	$+2,50547$	$-3,30763$
Δ^2	$+0,6212$	$+\bar{1},5119$
A_2	$-\bar{1},0720$	$-\bar{1},0720$
$A_2\Delta^2$	$-\bar{1},6932$	$-\bar{2},5839$
Δ^3	$+\bar{1},477$	$-0,724$
A_3	$+\bar{2},735$	$+\bar{2},735$
$A_3\Delta^3$	$+\bar{2},212$	$-\bar{1},459$
Δ^4	$-\bar{2},30$	$+\bar{1},48$
A_4	$-\bar{2},50$	$-\bar{2},50$
$A_4\Delta^4$	$+\bar{4},80$	$-\bar{3},98$

$$s = \frac{2^h.472}{4^h} = 0,618$$

$\frac{s-1}{2} =$	$0,191$	$s-1 = -0,382$
$\frac{s-2}{3} =$	$-0,46067$	$s-2 = -1,382$
$\frac{s-3}{4} =$	$-0,5955$	$s-3 = -2,382$

	α.	δ.
$A_1\Delta^1$	$+5^m.20^s,235$	$+33'.50'',6$
$A_2\Delta^2$	$+\quad 0,493$	$-\quad 3,84$
$A_3\Delta^3$	$+\quad 0,021$	$-\quad 0,29$
$A_4\Delta^4$	$-\quad 0,001$	$-\quad 0,01$
Somme	$+5.20,75$	$+33.46,5$

$$u_0 = 21^h.45^m.39^s,09 - 9^\circ.32'.16'',2,$$

Résultats $\begin{cases} \alpha = \quad 21^h.50^m.59^s,84 \\ \delta = -\ 8^\circ.58'.29'',7 \end{cases}$

Nancy.

ANALYSE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$ de degré m en y, et une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette équation*

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dx,$$

φ désignant une fonction rationnelle. Trouver les diverses valeurs que prend cette intégrale lorsqu'on fait varier le chemin d'intégration sans changer ses extrémités; périodes polaires; périodes cycliques.

II. *Étant donnée l'équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} - qy = 0,$$

où les coefficients p et q sont des fonctions uniformes de x, on considère un point singulier isolé a de ces fonctions :

1° *Montrer qu'il existe, relativement au point a, un système fondamental d'intégrales possédant des propriétés simples;*

2° *Déduire de ces propriétés la forme analytique de ces intégrales envisagées dans le domaine du point a;*

3° *Calculer effectivement ces intégrales dans le cas particulier où l'on a $p = 0$, $q = \dfrac{\sin^2 2\alpha}{4(x-a)^2}$, α pouvant recevoir toutes les valeurs possibles.*

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, à tout point M de l'espace*

on fait correspondre un cercle σ ayant son centre au point O, *son plan perpendiculaire à* OM *et son rayon égal à cette droite :*

1° *Trouver le lieu du point* M *pour lequel le cercle σ est tangent au cylindre*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a < b);$$

2° *Ce lieu est une surface du quatrième ordre* Σ. *Déterminer les sections de* Σ *par chacun des plans de coordonnées et les points doubles de la surface situés dans ces plans ;*

3° *Si l'on projette sur le plan des xy les sections de* Σ *par des plans perpendiculaires à* O*z puis par des sphères de centre* O, *on obtient deux familles de coniques homofocales, et les coniques d'une famille sont orthogonales aux coniques de l'autre famille ;*

4° *Les coordonnées x et y d'un point de* Σ *peuvent s'exprimer en fonction de la coordonnée z et d'un paramètre u par les formules*

$$x = \sqrt{b^2 - z^2}\sin u; \qquad y = \sqrt{a^2 - z^2}\cos u.$$

II. *Les coordonnées d'un point d'un paraboloïde de révolution étant exprimées au moyen de deux paramètres par les formules*

$$x = \mathrm{R}\cos v, \qquad y = \mathrm{R}\sin v, \qquad z = \frac{\mathrm{R}^2}{2p},$$

on demande de déterminer sur cette surface un réseau isotherme constitué par des parallèles et des méridiens.

La première question est l'étude d'un cas particulier de la surface de l'onde; *voir* l'article de M. Lacour dans les *Nouvelles Annales* de 1898, p. 266.

Pour la seconde question, on a

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R^2}{p^2}\right) dR^2 + R^2 dv^2 = R^2 \left(dv^2 + \frac{R^2 + p^2}{R^2 p^2} dR^2\right);$$

il suffit de poser

$$du = \frac{\sqrt{R^2 + p^2}}{Rp} dR,$$

d'où

$$u = \frac{\sqrt{R^2 + p^2}}{p} + L \frac{\sqrt{R^2 + p^2} - p}{R}$$

pour avoir

$$ds^2 = R(u)^2 (du^2 + dv^2).$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une surface* S *qui est de révolution autour d'une droite* D, *on considère les courbes* C *tracées sur cette surface et dont les normales principales rencontrent constamment la droite* D.

1° *Déterminer les projections des courbes* C *sur un plan perpendiculaire à* D;

2° *Indiquer quelle est la forme de ces projections lorsque la surface* S *est un cône, et quelles sont les transformées des courbes* C *lorsqu'on développe le cône sur un plan.*

II. *Déterminer toutes les fonctions u de trois variables x, y, z qui vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

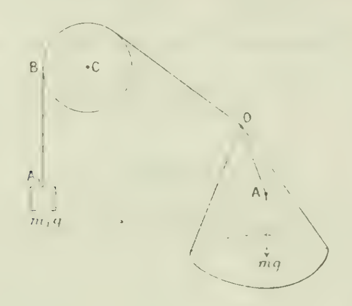
et qui sont de la forme

$$u = f(x) \times \varphi(y) \times \psi(z).$$

III. *Définition et détermination de la torsion d'une courbe gauche en un point donné de cette courbe.*

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Étudier le mouvement d'un système pesant composé d'un fil de longueur constante qui porte à ses deux extrémités* A *et* A_1 *deux poids*



mg et $m_1 g$. *Ce fil passe sur une poulie fixe* BC *et dans un petit anneau* O *placé au sommet d'un cône droit dont l'axe est vertical, la partie* OA *du fil devant rester sur ce cône et la partie* BA_1 *verticale.*

La masse de la poulie est M *et son rayon de gyration k. On négligera la masse du fil.*

Épreuve pratique. — *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde* $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ *et son asymptote.*

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — *Transmission du mouvement de rotation entre deux axes parallèles par le roulement de deux cames cylindriques.*

Condition de roulement des deux profils. Exemples simples.

Problème d'Euler : trouver l'un des profils connaissant l'autre; application au cas d'un cercle tournant autour d'un point de sa circonférence.

Profils dérivés.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire un système articulé plan permettant de décrire l'hyperbole équilatère.*

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définitions relatives aux parallaxes des étoiles et à celles des astres du système solaire. Valeurs des parallaxes de la Lune, du Soleil, des planètes principales, de quelques étoiles.*

Des ascension droite et déclinaison d'une planète, observées à un même instant, déduire l'ascension droite et la déclinaison géocentriques à cet instant : 1° dans le cas d'observations méridiennes; 2° dans le cas d'observations faites à un équatorial.

Indications sur la détermination des parallaxes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1732.

(1896, p. 296*.)

Étant donné un triangle ABC, *rectangle en* A, *sur les trois côtés* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ *pris comme diamètres, on décrit les circonférences* πa, πb, πc. *Les trois demi-circonférences supérieures comprennent entre elles deux lunules, que nous désignons par* l *et* l'; *les trois demi-circonférences inférieures forment entre elles un triangle curviligne et un segment biconvexe, que nous représentons par* t *et* s.

Prouver que :

1° *La somme* $l + l'$ *est équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$ *du triangle ;*

2° *La différence* $t - s$ *entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est aussi équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$ *;*

3° *Les centres de gravité des deux surfaces* $l + l'$ *et* $t -$ *sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse* a, *symétriquement placés par rapport à cette droite, et à une distance d'elle égale à* $\frac{1}{8}\pi a$.

(G. Dostor.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

On a évidemment

$$(1) \qquad l + l' + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2) + \frac{bc}{2},$$

d'où

$$l + l' = \frac{bc}{2},$$

et

$$(2) \qquad \frac{\pi a^2}{8} + \frac{bc}{2} = t + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2) - s,$$

d'où

$$t - s = \frac{bc}{2}.$$

(1) et (2) étant des identités, la somme algébrique des moments des surfaces, par rapport à l'hypoténuse et à la perpendiculaire élevée en son milieu, seront égaux de part et d'autre, et y_1, x_1 désignant les coordonnées du centre de gravité de $l + l'$ relatives à ces axes, on déduira de (1) les équations

$$\frac{bc}{2}y_1 + \frac{a^3}{12} = \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} + \frac{2c^2}{3\pi a}\right) + \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} + \frac{2b^2}{3\pi a}\right) + \frac{2b^2c^2}{12a},$$

$$\frac{bc}{2}x_1 = \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right)$$
$$- \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right) + \frac{bc}{12a}(b^2 - c^2),$$

d'où l'on tire

$$y_1 = \frac{\pi a}{8}, \qquad x_1 = 0.$$

Les coordonnées du centre de gravité de $t - s$ se déduiront de même de (2) à l'aide des deux équations

$$-\frac{a^3}{12} + \frac{2b^2c^2}{12a} + \frac{bc}{2}y_1 + \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} - \frac{2c^2}{3\pi a}\right) + \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} - \frac{2b^2}{3\pi a}\right),$$

$$\frac{bc(b^2 - c^2)}{12a} = \frac{bc}{2}x_1 - \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}\right) - \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}\right),$$

qui donnent

$$y_1 = -\frac{\pi a}{8}, \qquad x_1 = 0.$$

Questions 1734 et 1735.

(1896, p. 344.)

1734. *Si $n - 1$ et $n + 1$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme $n = 30m$, ou $n = 30m \pm 12$, et $n^2(n^2 + 16)$ est toujours divisible par* 720. (WOLSTENHOLME.)

1735. *Si $n - 2$ et $n + 2$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme $n = 30m + 15$ ou $n = 30m \pm 9$.* (WOLSTENHOLME.)

SOLUTIONS

Par M. DULIMBERT.

1734. Il est évident d'abord qu'il ne peut s'agir que de nombres supérieurs à 5, la plus petite valeur de n donnée par les formules étant 7.

Un nombre quelconque rentre dans une des formes suivantes :

$$30m, \quad 30m \pm 1, \quad \ldots, \quad 30m \pm 14, \quad 30m + 15.$$

Si nous tirons d'une de ces formes les valeurs de $n+1$ et $n+2$, nous voyons que l'un de ces deux nombres a un diviseur évident, sauf dans les cas de $n = 30m$ et $n = 30m \pm 12$.

Le nombre 720 est égal à $2^4.3^2.5$. Prenons $n = 30m$. Alors on a identiquement

$$\begin{aligned} n^2(n^2+16) &= 2^2.3^2.5^2.m^2(2^2.3^2.5^2.m^2+2^4) \\ &= 2^4.3^2.5^2.m^2(3^2.5^2.m^2+2^2); \end{aligned}$$

sous cette forme la divisibilité est évidente.

Prenons maintenant $n = 30m \pm 12$. On a identiquement

$$\begin{aligned} n^2(n^2-16) &= 2^2.3^2(5m \pm 2)^2 \{2^2.3^2(5m \pm 2^2)^2 + 2^4\} \\ &= 2^4.3^2(5m \pm 2)^2 \{3^2(5m \pm 2)^2 + 2^2\}. \end{aligned}$$

La divisibilité par 720 sera démontrée si l'on démontre que la quantité entre accolades est divisible par 5. Or, si l'on développe le carré, on constate que deux de ses termes contiennent 5 en facteur; le troisième, $3^2.2^2$, ajouté au terme 2^2, donne 40, quantité divisible par 5. La divisibilité est donc démontrée.

1735. La démonstration est identique à celle de la première partie de la question 1734.

Autres solutions de M. R. DE MONTESSUS.

BIBLIOGRAPHIE.

CALCUL DE GÉNÉRALISATION, par *G. Oltramare*. Paris, librairie A. Hermann, 1899.

L'Ouvrage que vient de publier M. G. Oltramare est le résumé de recherches entreprises depuis plusieurs années sur un procédé de calcul symbolique auquel l'Auteur a donné le nom de *Calcul de généralisation*, et sur les applications de ce calcul. La méthode a pour base la représentation des fonctions uniformes en séries d'exponentielles, envisagée déjà par

Liouville dans son *Calcul des dérivées à indices quelconques* et par Abel dans son *Calcul des fonctions génératrices et de leurs déterminantes*. Cette représentation, admise comme toujours légitime, permet d'effectuer symboliquement avec une facilité remarquable les opérations analytiques usuelles, telles que la différentiation, l'intégration et, en général, les opérations distributives linéaires. Les problèmes qui mettent en jeu ce genre d'opérations comptent, on le sait, parmi les plus importants qu'on ait à résoudre en Analyse. Le nouveau Calcul permet de les considérer tous sous un point de vue général et donne avec la plus grande facilité leur solution sous forme symbolique : la difficulté consiste alors à remonter de la forme symbolique à la solution définitive explicite.

C'est à cet objet que sont consacrés les huit premiers Chapitres de l'Ouvrage. On apprend à *généraliser* les fonctions d'une ou de plusieurs variables, d'abord par une formule générale déduite du théorème de Fourier, ensuite par des procédés spéciaux, plus simples, variant d'ailleurs suivant la nature des fonctions, rationnelles, exponentielles, circulaires, logarithmiques, transcendantes diverses, etc.; comme on peut en outre souvent imaginer bien des moyens différents pour exécuter la généralisation d'une même fonction, la comparaison des résultats donnera lieu à des identités plus ou moins remarquables.

Avec le Chapitre X commencent les applications qui forment la partie la plus intéressante et aussi la plus développée de l'Ouvrage. On y trouvera notamment les formules pour la différentiation à indices fractionnaires, la transformation des séries en intégrales définies ou réciproquement, le calcul inverse des intégrales définies, enfin l'intégration des équations linéaires, différentielles ou à différences finies, à une ou plusieurs fonctions inconnues. Un très grand nombre d'exemples, d'un caractère un peu abstrait et uniforme, éclaircissent la théorie générale et mettent en lumière la puissance vraiment remarquable du nouveau Calcul.

Le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver les questions abordées dans cet Ouvrage traitées avec la rigueur qui est de règle dans la littérature mathématique contemporaine; il n'aura pas de peine à signaler plusieurs résultats douteux ou même erronés. Il ne faudrait pas attribuer à ces imperfections plus d'importance qu'il ne convient.

Le souci de l'extrême rigueur a jeté, en France, un discrédit immérité sur toutes les méthodes qui n'y peuvent prétendre. En les proscrivant, on se prive souvent d'un précieux auxiliaire qui, s'il ne peut fournir les solutions définitives, en rend l'élaboration plus simple. Envisagé à ce point de vue, le Calcul de généralisation apparaîtra comme un puissant moyen d'investigation et pourra rendre de sérieux services aux mathématiciens qui voudront s'en approprier les procédés au prix d'efforts relativement peu pénibles.

QUESTIONS.

1819. Soient S et S′ deux coniques se coupant en quatre points A, B, C, D :

1° Démontrer que le lieu des points M tels que le faisceau M(ABCD) soit harmonique, se compose de trois coniques passant par A, B, C et D. Former l'équation de l'ensemble de ces trois coniques;

2° Quelle relation doit exister entre les invariants de S et S′ pour que, parmi les trois coniques trouvées, se trouve la conique S; quelles sont, de même, les relations nécessaires pour que S et S′ soient deux des trois coniques; quelle est alors l'équation de la troisième? (H. Vogt.)

1820. Étant donnés dans un même plan un faisceau de coniques ayant entre elles double contact, et une courbe algébrique C_m^n, on mène les tangentes communes à C_m^n et à chaque conique : déterminer le lieu des points de contact sur les coniques. (V. Retali.)

1821. Le lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique centrale et ayant pour foyer un point fixe est une courbe unicursale du douzième ordre et de la dixième classe, ayant un point sextuple, avec deux coïncidences, en le point fixe et en chacun des points circulaires à l'infini; ayant, en outre, quatre points doubles ordinaires et six rebroussements. (V. Retali.)

[M²41]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898;

PAR M. RAOUL BRICARD [1].

I. *On dit que six points d'une conique forment trois couples en involution (ou sont en involution) quand les trois droites joignant les points de chaque couple sont concourantes.*

Établir que six points d'une conique peuvent être en involution de 1, 2, 3, 4 *ou* 6 *manières différentes et définir géométriquement, dans chaque cas, les positions correspondantes des six points.*

II. *On nomme* tétraédroïde *la transformée homographique générale de la surface de l'onde; en coordonnées homogènes, une telle surface est définie paramétriquement par les relations*

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u}\,\dfrac{\overline{\sigma_1 v}}{\overline{\sigma v}}, \\[2ex] \dfrac{y}{t} = \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u}\,\dfrac{\overline{\sigma_2 v}}{\overline{\sigma v}}, \\[2ex] \dfrac{z}{t} = \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u}\,\dfrac{\overline{\sigma_3 v}}{\overline{\sigma v}}, \end{cases}$$

σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ *étant les fonctions classiques de Weierstrass formées avec les périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; $\overline{\sigma v}$, $\overline{\sigma_1 v}$, $\overline{\sigma_2 v}$, $\overline{\sigma_3 v}$ [2] *étant les fonctions analogues formées avec les périodes* $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

---

(1) Mémoire ayant obtenu le prix.

(2) On désignera par e_1, e_2, e_3 les valeurs de $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$, pu étant la fonction classique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; par ε_1, ε_2, ε_3 les va-

Vérifier que la surface (1) *a seize points doubles, situés six à six dans seize plans* (*plans singuliers*); *que par un point double passent six plans singuliers; que les six points doubles*, P_i, *situés dans un même plan singulier sont en involution; que les seize points doubles sont quatre par quatre sur les faces d'un tétraèdre et que les seize plans singuliers passent quatre par quatre par les sommets du même tétraèdre.*

III. *Montrer que les périodes* (*ou les modules*) *des fonctions elliptiques peuvent être choisies de telle sorte que les six points doubles* P_i (*situés dans un même plan singulier*) *soient en involution de deux manières différentes. Vérifier que la surface* (1) *est alors deux fois tétraédroïde, c'est-à-dire que les seize points doubles sont, quatre par quatre, sur les faces d'un nouveau tétraèdre. Équation correspondante de la surface.*

IV. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de trois manières différentes; vérifier que la surface* (1) *est alors trois fois tétraédroïde. Étudier les positions relatives des trois tétraèdres correspondants.*

Former la relation qui existe en ce cas entre les modules des fonctions elliptiques introduites $\left(\right.$*on prendra pour modules* $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ *et* $\left.\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right)$, *vérifier qu'elle coïncide avec l'équation modulaire pour* $n = 3$. *Conséquence pour les périodes. Équation correspondante de la surface.*

V. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de quatre manières différentes et*

---

leurs de $\overline{p\varpi_1}$, $\overline{p\varpi_2}$, $\overline{p\varpi_3}$, $\overline{pv}$ étant la fonction analogue aux périodes $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

que la surface est alors quatre fois tétraédroïde. Déterminer en ce cas les périodes et les modules des fonctions elliptiques. Équation de la surface; étudier les positions relatives des seize points doubles.

VI. *Montrer que les six points P_i peuvent être en involution de six manières différentes et que la surface est alors six fois tétraédroïde. Périodes et modules des fonctions elliptiques; équation de la surface; positions relatives des seize points doubles.*

Nota. — *On ne devra pas s'appuyer sur la théorie des fonctions ou des intégrales hyperelliptiques ni sur les propriétés de la surface de Kummer.*

I.

1° Considérons, sur une conique C, six points que nous désignerons par a, b, c, a_t, b_t, c_t (cette notation étant celle que nous retrouverons dans l'étude de la surface tétraédroïde). Supposons-les en involution, de telle manière que les trois droites

$$aa_t, \quad bb_t, \quad cc_t$$

soient concourantes. Nous désignerons par ω_1 leur point de concours (*centre de l'involution*).

Il peut arriver que ces six points soient en involution d'une seconde manière, *de sorte qu'un des couples précédents soit conservé.* Par exemple, les droites

$$aa_t, \quad bc_t, \quad cb_t$$

sont concourantes en un point ω_2.

On se rendra facilement compte du fait suivant : *les points ω_1 et ω_2 sont conjugués par rapport à* C. Réciproquement, on constituera, de la manière suivante, le système le plus général de six points de la conique C qui soient en involution de deux manières différentes : on

choisit deux points ω_1 et ω_2, conjugués par rapport à C. Les deux points a et a_t sont les points d'intersection de C avec la droite $\omega_1\omega_2$. Par le point ω_1 on mène une sécante arbitraire recontrant C aux points b et b_t. Les deux droites $\omega_2 b$ et $\omega_2 b_t$ déterminent les points c_t et c sur la conique C.

2° Supposons maintenant que les six points soient en involution de deux manières différentes, et *de sorte que l'on ne rencontre pas deux fois le même couple de points*. Par exemple,

Les droites aa_t, bb_t, cc_t concourent en ω_1,
Les droites ab_t, bc_t, ca_t concourent en ω_2.

Je dis que les six points sont en involution d'une troisième manière, de telle sorte que les droites

$$ac_t,\quad ba_t,\quad cb_t$$

sont encore concourantes.

Faisons en effet une transformation homographique de la figure telle que les points ω_1 et ω_2 soient rejetés à l'infini et que la conique C devienne un cercle. On se rend immédiatement compte que les deux triangles abc, $a_t b_t c_t$ sont équilatéraux et inversement orientés. Il est alors évident que les droites ac_t, ba_t, cb_t sont parallèles, ce qui établit le théorème.

La démonstration précédente permet d'ajouter ce qui suit : *Si l'on appelle* ω_3 *le troisième centre d'involution, les trois points* ω_1, ω_2, ω_3 *sont en ligne droite; de plus, le segment limité par les points d'intersection de* C *et de la droite* $\omega_1\omega_2\omega_3$ *est divisé équianharmoniquement par deux quelconques des trois points* ω_1, ω_2, ω_3. En effet, dans la figure transformée, les trois points ω_1, ω_2, ω_3 sont rejetés à l'infini dans des directions inclinées à 120° les unes sur les autres.

3° Les six points étant en involution des trois manières que nous avons indiquées peuvent encore l'être d'une quatrième, de telle sorte que les droites

$$aa_t,\quad bc_t,\quad cb_t$$

sont concourantes en un point ω_4.

En raisonnant comme précédemment, on verra que *la figure est la transformée homographique de celle formée par six points situés aux sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle* (les droites aa_t, bc_t, cb_t sont des diamètres). Les points ω_1, ω_2, ω_3 sont situés comme précédemment, et le point ω_4 est le pôle de la droite $\omega_1\omega_2\omega_3$.

4° En dernier lieu, les points étant déjà de trois manières en involution (groupés comme il est indiqué dans le 2°), ils peuvent l'être d'une quatrième, de sorte que les droites

$$aa_t,\quad bc_t,\quad b_tc_t$$

concourent en un même point ω'_1.

En appliquant le théorème du 2°, on voit que nos six points sont encore en involution de deux nouvelles manières :

Les droites bc_t, ac, b_ta_t concourent en un point ω'_2;
Les droites cb_t, ab, c_ta_t concourent en un point ω'_3.

Les six centres d'involution sont aux sommets d'un quadrilatère complet : sur chaque côté de ce quadrilatère on rencontre les trois indices; les points ω_1 et ω'_1, ω_2 et ω'_2, ω_3 et ω'_3 forment deux à deux des couples de sommets opposés; ces points sont aussi conjugués deux à deux par rapport à la conique.

La figure formée dans ce dernier cas ne peut être réelle. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que tous les cas possibles ont été passés en revue et que, à la

notation près, les dispositions indiquées sont chacune les plus générales de leur espèce.

II.

Nous emploierons la notation connue

$$\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sigma_{\alpha 0} u.$$

Les relations qui définissent la tétraédroïde deviennent ainsi

$$\frac{x}{t} = \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v},$$

$$\frac{y}{t} = \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v},$$

$$\frac{z}{t} = \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v}.$$

Nous obtiendrons les points doubles en cherchant les points où le plan tangent est indéterminé; or au point (u, v) le plan tangent a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 1 \\ \sigma'_{10} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma'_{20} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma'_{30} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 0 \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma'_{10} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma'_{20} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma'_{30} v} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On a

$$\sigma'_{\alpha 0} u = \frac{d}{du} \sqrt{pu - e_\alpha}$$

$$= \frac{p' u}{2\sqrt{pu - e_\alpha}} = \sqrt{pu - e_\beta}\,\sqrt{pu - e_\gamma} = \sigma_{\beta 0} u \, \sigma_{\gamma 0} u.$$

Dans le déterminant que forme le premier membre de l'équation du plan tangent, on peut donc écrire les deux dernières lignes ainsi :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{20} u \, \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{30} u \, \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{20} v} & \sigma_{10} u \, \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{30} v} & 0 \\ \sigma_{10} u \, \overline{\sigma_{20} v} \, \overline{\sigma_{30} v} & \sigma_{20} u \, \overline{\sigma_{30} v} \, \overline{\sigma_{10} v} & \sigma_{30} u \, \overline{\sigma_{10} v} \, \overline{\sigma_{20} v} & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour que le plan tangent soit indéterminé, il faut et il suffit que tous les déterminants du tableau précédent soient nuls. On trouve aisément tous les systèmes de solutions, qui sont les suivants :

$$\sigma_{10} u = \overline{\sigma_{10} v} = 0, \qquad \sigma_{20} u = \overline{\sigma_{20} v} = 0, \qquad \sigma_{30} u = \overline{\sigma_{30} v} = 0,$$
$$pu = pv = \infty.$$

A chaque système de solutions correspondent quatre points doubles. Il y en a donc seize en tout, et l'on formera facilement le Tableau de leurs coordonnées.

En posant

$$\alpha = \sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3},$$
$$\beta = \sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1},$$
$$\gamma = \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

ce Tableau est le suivant :

Tableau des points doubles de la tétraédroïde.

Points.	x.	y.	z.	t.
a	0	$-\gamma$	β	1
a_y	0	γ	β	1
a_z	0	$-\gamma$	$-\beta$	1
a_t	0	γ	$-\beta$	1
..	....	....	....	.
b	γ	0	$-\alpha$	1
b_z	γ	0	α	1
b_x	$-\gamma$	0	$-\alpha$	1
b_t	$-\gamma$	0	α	1
..	....	....	....	.
c	$-\beta$	α	0	1
c_x	β	α	0	1
c_y	$-\beta$	$-\alpha$	0	1
c_t	β	$-\alpha$	0	1
..	....	....	....	.
d	1	1	1	0
d_x	-1	1	1	0
d_y	1	-1	1	0
d_z	1	1	-1	0

Étudions la disposition de ces points.

On voit qu'ils sont quatre par quatre sur les faces du tétraèdre de référence ABCD. Les quatre points situés dans une même face sont deux à deux en ligne droite avec les sommets de cette face. Ainsi, dans le plan ABC,

Les droites dd_x et $d_y d_z$	passent par le sommet	A,
» dd_y et $d_z d_x$	»	B.
» dd_z et $d_x d_y$	»	C.

On voit la raison de la notation adoptée.

Chaque sommet appartenant à trois faces est situé sur six droites dont chacune contient deux points doubles. Voici, par exemple, les six droites passant par le sommet D (nous écrivons leurs équations en regard) :

$D a\; a_t,$	$x = 0,$	$\beta y - \gamma z = 0,$
$D a_y a_z,$	$x = 0,$	$\beta y - \gamma z = 0,$
$D b\; b_t,$	$y = 0,$	$\gamma z - \alpha x = 0,$
$D b_z b_x,$	$y = 0,$	$\gamma z - \alpha x = 0,$
$D c\; c_t,$	$z = 0,$	$\alpha x + \beta y = 0,$
$D c_x c_y,$	$z = 0,$	$\alpha x - \beta y = 0.$

On voit aisément que ces six droites sont les intersections mutuelles des quatre plans

$\alpha x - \beta y + \gamma z = 0$	(contenant	$a\; a_t b\; b_t c\; c_t$),
$-\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	»	$a\; a_t b_z b_x c_x c_y$),
$\alpha x - \beta y + \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b\; b_t c_x c_y$),
$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0$	»	$a_y a_z b_z b_x c\; c_t$).

Ainsi les points doubles situés deux à deux sur des droites concourant en un sommet du tétraèdre sont situés six par six dans quatre plans. On trouvera, en tout,

seize plans singuliers analogues dont voici le Tableau :

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	contenant les points	$a \ a_t \ b \ b_t \ c \ c_t$,
$\alpha x + \beta y - \gamma z = 0$	»	$a_y \ a_z \ b_z \ b_x \ c \ c_t$,
$\alpha x - \beta y + \gamma z = 0$	»	$a_y \ a_z \ b \ b_t \ c_x \ c_y$,
$-\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$	»	$a \ a_t \ b_z \ b_x \ c_x \ c_y$.
$y + z - \alpha t = 0$	»	$b \ b_x \ c_y \ c_t \ d_y \ d_z$,
$y + z - \alpha t = 0$	»	$b_z \ b_t \ c \ c_x \ d_y \ d_z$,
$y - z + \alpha t = 0$	»	$b_z \ b_t \ c_y \ c_t \ d \ d_x$,
$-y + z + \alpha t = 0$	»	$b \ b_x \ c \ c_x \ d \ d_x$.
$z + x + \beta t = 0$	»	$c \ c_y \ a_z \ a_t \ d_z \ d_x$,
$z + x - \beta t = 0$	»	$c_x \ c_t \ a \ a_y \ d_z \ d_x$,
$z - x + \beta t = 0$	»	$c_x \ c_t \ a_z \ a_t \ d \ d_y$.
$-z + x + \beta t = 0$	»	$c \ c_y \ a \ a_y \ d \ d_y$,
$x + y + \gamma t = 0$	»	$a \ a_z \ b_x \ b_t \ d_x \ d_y$,
$x - y - \gamma t = 0$	»	$a_y \ a_t \ b \ b_z \ d_x \ d_y$,
$x - y + \gamma t = 0$	»	$a_y \ a_t \ b_x \ b_t \ d \ d_z$,
$-x + y + \gamma t = 0$	»	$a \ a_z \ b \ b_z \ d \ d_z$.

On voit que chaque point double appartient à six plans singuliers. En outre, la droite joignant deux points doubles quelconques est l'intersection de deux plans singuliers.

Considérons enfin les points doubles situés dans un même plan singulier, par exemple les points a, a_t, b, b_t, c, c_t. Les droites aa_t, bb_t, cc_t sont concourantes au point D. Soit L la trace du plan $(aa_t bb_t cc_t)$ sur le plan $t = 0$. On voit immédiatement que les points a, a_t divisent harmoniquement le segment de la droite $\mathrm{D}aa_t$ compris entre le point D et le point d'intersection de cette droite avec L. On a un fait semblable relativement aux points b, b_t et aux points c, c_t.

Cela posé, on a le théorème suivant, dont la démonstration est des plus simples : *Étant données une droite* L *et trois droites concourantes dont chacune porte deux*

points qui divisent harmoniquement le segment limité par le point de concours et la droite L, les six points ainsi déterminés appartiennent à une même conique, sur laquelle ils sont évidemment en involution.

Les points a, a_t, b, b_t, c, c_t sont donc en involution sur une conique, et nous avons établi toutes les propositions énoncées dans le § II.

III.

Considérons encore les six points doubles a, a_t, b, b_t, c, c_t, situés dans un même plan singulier. Ces points seront en involution d'une seconde manière (§ I), si les droites

$$aa_t, \quad bc_t, \quad cb_t$$

sont concourantes.

Il suffit d'exprimer pour cela que les plans $\mathrm{A}aa_t$, $\mathrm{A}bc_t$, $\mathrm{A}cb_t$ ont une droite commune. Or ces plans ont pour équations respectives

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A}aa_t, & \beta y + \gamma z = 0, \\ \mathrm{A}bc_t, & y - z - \alpha t = 0, \\ \mathrm{A}cb_t, & y - z + \alpha t = 0. \end{array}$$

On trouve la condition

$$(1) \qquad \beta = \gamma.$$

On voit de plus que le nouveau centre d'involution est dans le plan $t = 0$, c'est-à-dire sur l'arête BC. Ce résultat pouvait être prévu, puisque ce nouveau centre d'involution doit être conjugué du premier D, par rapport à la conique $(aa_tbb_tcc_t)$ (§ I).

Cette condition étant satisfaite, on vérifie que les seize points doubles sont répartis quatre par quatre, sur les faces d'un nouveau tétraèdre T'. Nous donnons ci-

dessous les équations des faces de ce nouveau tétraèdre, et nous mettons en regard les points contenus dans ces faces :

$$\begin{array}{ll} y + z = 0, & a,\ a_t,\ d_y,\ d_z, \\ y - z = 0, & a_y,\ a_z,\ d,\ d_x, \\ x + \beta t = 0, & b_x,\ b_t,\ c,\ c_y, \\ x - \beta t = 0, & b,\ b_z,\ c_x,\ c_t. \end{array}$$

Deux des sommets du nouveau tétraèdre sont situés sur l'arête BC ; les deux autres, sur l'arête AD ; *sur chacune de ces arêtes on a une division harmonique.*

Relation entre les modules et les périodes et équation de la surface. — Pour plus de simplicité, nous prendrons comme modules les quantités

$$K = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}, \qquad K' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \text{ (}^1\text{)}.$$

La condition (1) s'écrit alors

$$KK' = 1.$$

Les fonctions pu et $\overline{pv}$ introduites ont même invariant absolu et par suite même rapport de périodes. Comme les quantités e_1, e_2, e_3 d'une part, ε_1, ε_2, ε_3 de l'autre, n'interviennent évidemment dans l'équation de la surface que par leurs rapports mutuels, on peut poser sans inconvénient

$$\begin{aligned} e_1 = \varepsilon_1 &= \quad K + 1, \\ e_2 = \varepsilon_3 &= -2K + 1, \\ e_3 = \varepsilon_2 &= \quad K - 2. \end{aligned}$$

---

(1) Cela n'est pas conforme aux prescriptions de l'énoncé, et je prie l'auteur de la question de vouloir bien m'en excuser. J'aurais dû grouper les points de manière à être conduit à la condition $\alpha = \beta$, ce qui m'aurait amené à prendre pour modules $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ et $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$.

On remarquera en outre que, pour simplifier les formules, j'ai écrit K au lieu de K^2, comme on le fait d'habitude.

On a bien ainsi

$$e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \mathrm{K}.$$

Les relations qui définissent la tétraédroïde deviennent alors

$$\frac{x^2}{t^2} = (pu - \mathrm{K} - 1)(\overline{pv} - \mathrm{K} - 1),$$

$$\frac{y^2}{t^2} = (pu + 2\mathrm{K} - 1)(\overline{pv} - \mathrm{K} + 2),$$

$$\frac{z^2}{t^2} = (pu - \mathrm{K} + 2)(\overline{pv} + 2\mathrm{K} - 1),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{x^2}{t^2} = \lambda\mu,$$

$$\frac{y^2}{t^2} = (\lambda + \mathrm{K})(\mu + 1),$$

$$\frac{z^2}{t^2} = (\lambda - 1)(\mu - \mathrm{K}),$$

en posant

$$pu - \mathrm{K} - 1 = 3\lambda, \qquad \overline{pv} - \mathrm{K} - 1 = 3\mu,$$

et en supprimant le facteur 9 dans chaque second membre, ce qui est une simple transformation homographique.

Un calcul facile donne l'équation de la surface

$$[(1 - \mathrm{K})x^2 - y^2 + \mathrm{K}z^2 + (\mathrm{K} - \mathrm{K}^2)t^2]$$
$$\times [(1 - \mathrm{K})x^2 - \mathrm{K}y^2 - z^2 + (\mathrm{K} - \mathrm{K}^2)t^2] - (\mathrm{K}^2 - 1)^2 x^2 t^2 = 0.$$

IV.

Les points doubles a, a_t, b, b_t, c, c_t seront en involution de trois manières différentes si les droites ab_t, bc_t, ca_t sont concourantes (§ I). On trouve aisément la

condition

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0.$$

Cette condition peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma & \beta & 1 \\ \gamma & 0 & \alpha & 1 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que les quatre points a_y, b_z, c_x, d sont dans un même plan.

On peut écrire de huit manières la relation précédente, en changeant dans le déterminant les signes de certains éléments, de telle manière que la relation ne soit pas altérée. On a par exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -\beta & 1 \\ \gamma & 0 & -\alpha & 1 \\ \beta & -\alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que les quatre points $a_z b c_t d_x$ sont dans un même plan. En procédant ainsi, on reconnaît que les points doubles sont répartis quatre par quatre sur les faces de deux nouveaux tétraèdres. Cette répartition est indiquée dans le Tableau suivant :

$$\text{Deuxième tétraèdre : } T_2 \left\{ \begin{array}{l} a\ b_t\ c_y\, d_z, \\ a_z b\ \ c_t\ d_x, \\ a_t\, b_x c\ \ d_y, \\ a_y b_z\, c_x d, \end{array} \right.$$

$$\text{Troisième tétraèdre : } T_3 \left\{ \begin{array}{l} a_t\ b\ \ c_x d_z, \\ a_y b_t\ c\ \ d_x, \\ a\ \ b_z\, c_t\ d_y, \\ a_z\, b_x c_y\, d. \end{array} \right.$$

Voici maintenant quelques mots sur la disposition des trois tétraèdres : dans chacun des quatre plans singuliers qui contiennent le sommet D du premier tétraèdre, les six points doubles sont en involution de trois manières différentes et l'on sait (§ I) que les trois centres d'involution sont en ligne droite. On voit donc que les sommets des deux nouveaux tétraèdres sont deux à deux en ligne droite avec le point D. Cette remarque s'étend aux autres sommets. En outre, il est évident que chacun des tétraèdres jouit des mêmes propriétés par rapport aux deux autres. Ainsi *les trois tétraèdres sont tels que la droite joignant deux sommets quelconques de deux d'entre eux passe par un sommet du troisième.* On reconnaît le *système desmique* de trois tétraèdres, étudié par M. Cyparissos Stephanos [1]. Pour les propriétés de cette configuration remarquable, nous renverrons au Mémoire cité en Note, ou à la *Géométrie réglée* de M. Kœnigs (Chap. V).

Relation entre les fonctions elliptiques introduites. — La relation (2) peut s'écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \\ &\quad - \sqrt[4]{e_3 - e_1}\,\sqrt[4]{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or nous allons montrer que cette relation a lieu entre les éléments $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$ et $\overline{p\varpi_1}$, $\overline{p\varpi_2}$, $\overline{p\varpi_3}$, si l'on a entre les périodes la relation

$$\varpi_1 = \frac{\omega_1}{3}, \qquad \varpi_2 = \omega_2.$$

Il résulte en effet d'une formule donnée par M. Jor-

---

(1) *Bull. des Sc. math.*, t. XIV.

dan dans son *Traité d'Analyse* (¹) que l'on a alors

$$\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)^3 \left[\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_\gamma\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}}\right]^4,$$

ce qui donne successivement

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = (e_2 - e_3)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_1\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{e_3 - e_1}\,\sqrt[4]{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = (e_3 - e_1)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_2\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = (e_1 - e_2)\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_3\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}};$$

on tire aisément de là la relation (3).

La relation entre les modules des fonctions elliptiques introduites coïncide donc avec l'équation modulaire pour $n = 3$. Cette relation est

$$(4) \qquad \sqrt[4]{KK'} + \sqrt[4]{(K-1)(K'-1)} - 1 = 0;$$

on la rendra facilement rationnelle (cette forme est d'ailleurs classique).

Dans une Note insérée au *Bulletin de la Soc. math. de France* (²), M. G. Humbert a montré que la relation (4) est unicursale, et que l'on y satisfait en posant

$$K' = \frac{(\lambda-1)^3(3\lambda+1)}{(\lambda+1)^3(3\lambda-1)},$$

$$K = \frac{(\lambda-1)(3\lambda+1)^3}{(\lambda+1)(3\lambda-1)^3}.$$

(¹) Tome II, 2ᵉ édit., Chap. VI, p. 519, formule (23).

(²) Tome XXVI, p. 235.

Quant à l'équation de la surface, on l'obtient par l'élimination de λ et μ entre les équations

$$\frac{x^2}{t^2} = \lambda\mu,$$

$$\frac{y^2}{t^2} = (\lambda + K)(\mu + K'),$$

$$\frac{z^2}{t^2} = (\lambda + 1)(\mu + 1)$$

(même calcul qu'au § III), ce qui donne

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} [(K-1)x^2 + y^2 - Kz^2 + (K - KK')t^2] \\ \quad \times [(K'-1)x^2 + y^2 - K'z^2 + (K' - KK')t^2] + (K - K')^2 x^2 t^2 = 0, \end{array} \right.$$

où l'on peut remplacer K et K' par leurs valeurs données plus haut.

V.

Les points doubles seront en involution de quatre manières différentes, si les particularités du § III et celles du § IV se présentent en même temps. On doit donc avoir simultanément

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = 0,$$
$$\beta = \gamma,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 4\beta = 4\gamma.$$

Les modules sont donnés par les équations

$$(6)\qquad K^2 + 14K + 1 = 0, \qquad K' = \frac{1}{K}.$$

Les deux fonctions pu et $\overline{pv}$ sont reliées par une transformation de degré 3, et de plus elles ont même invariant absolu. Il en résulte que *chacune d'elles admet une multiplication complexe.*

Pour déterminer le discriminant qui correspond à

cette multiplication complexe, on peut procéder ainsi : Nous calculerons tout d'abord $p\frac{2\omega_1}{3}$ à l'aide des formules déjà employées

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (e_2 - e_1)^3 \left[\frac{2\left(p\frac{2\omega_1}{3} - e_3\right)}{p'\frac{2\omega_1}{3}} \right]^4,$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on tire, par division,

$$(7) \qquad \left(\frac{p\frac{2\omega_1}{3} - e_3}{p\frac{2\omega_1}{3} - e_2} \right)^4 = \frac{1}{K^4}.$$

Cette relation donne quatre valeurs possibles pour $p\frac{2\omega_1}{3}$. *Elles sont toutes de la forme*

$$p\frac{2\omega_1}{3} = \mu + \nu\sqrt{3},$$

μ et ν étant des nombres rationnels, réels ou complexes. D'autre part, on a la formule connue

$$\frac{1}{20}(m^4 - 1)g_2 = \frac{1}{2}\sum_1^2 p''\frac{2\omega_1}{3} = p''\frac{2\omega_1}{3} = p^2\frac{2\omega_1}{3} - \frac{1}{2}g_2,$$

m étant le multiplicateur complexe, qui est de l'une des formes

$$x + yi\sqrt{D}, \qquad \frac{1}{2}(x + yi\sqrt{D}),$$

D étant le discriminant cherché, x et y des nombres entiers.

On peut écrire l'égalité précédente

$$m^4 = -9 + \frac{p^2\frac{2\omega_1}{3}}{g_2}.$$

Le second membre est de la forme $\mu' + \nu' \sqrt{3}$, le premier membre de la forme $\mu_1 + \nu_1 \sqrt{D}$. On a donc nécessairement

$$D = 3.$$

Ainsi le rapport τ des périodes de la fonction pu satisfait à une relation à coefficients entiers

$$A\tau^2 - 2B\tau + C = 0,$$

de discriminant égal à 3.

On sait que les équations quadratiques de cette nature appartiennent à deux classes différentes, pour lesquelles les formes réduites sont respectivement

$$\tau^2 + \tau + 1 = 0,$$
$$\tau^2 + 3 = 0.$$

La première relation est certainement à rejeter, car si elle était satisfaite, la fonction pu serait équianharmonique, comme il est bien connu ; et cela n'a pas lieu, K n'étant pas égal à une racine cubique de l'unité, changée de signe.

En résumé, les fonctions elliptiques introduites ont même invariant absolu et, par suite, même rapport de périodes. De plus, deux périodes primitives de l'une, convenablement choisies, satisfont à la relation

$$\omega_1^2 + 3\omega_2^2 = 0.$$

Disposition des points doubles. — On aura le Tableau de leurs coordonnées en faisant, dans le tableau du § II,

$$\beta = \gamma = 1, \qquad \alpha = i.$$

Ces points peuvent être répartis quatre par quatre sur les faces de quatre tétraèdres, savoir : le tétraèdre de référence T_1, les deux tétraèdres T_2 et T_3 du § IV, et le tétraèdre T' du § II.

Le tétraèdre T′ a, comme on l'a vu, deux arêtes opposées communes avec le tétraèdre T_1 ; il est évidemment dans la même situation, relativement à T_2 et à T_3 ; par conséquent, *chaque arête de l'un des tétraèdres desmiques* T_1, T_2, T_3 *rencontre deux arêtes opposées de chacun des deux centres.*

Il est à noter que cet assemblage remarquable de quatre tétraèdres peut être réel.

Quant à l'équation de la surface, on la formera en faisant

$$K = 7 \pm 4\sqrt{3},$$

dans l'équation donnée à la fin du § IV.

VI.

Les points doubles situés dans un même plan singulier seront en involution sextuple, si la disposition du § IV est réalisée, et si de plus les trois droites aa_t, bc_t, cb_t sont concourantes (§ I). On trouve la condition

$$\beta = -\gamma,$$

qui doit être jointe à la relation (2).

On tire de là

$$\alpha = 2\beta i = -2\gamma i$$

et

$$(8) \qquad K^2 - 6K + 1 = 0.$$

Comme précédemment, la fonction pu admet une multiplication complexe. En répétant les raisonnements indiqués précédemment, on trouve que *le discriminant de la multiplication complexe est ici égal à* 2 ; la relation entre les périodes est

$$\omega_1^2 + 2\omega_2^2 = 0,$$

ou une relation équivalente. (Il n'y a qu'une seule classe de formes quadratiques, de discriminant égal à 2.)

Disposition des points doubles. — On aura les coordonnées des points doubles en faisant dans le Tableau :

$$\alpha = 2, \qquad \beta = i, \qquad \gamma = -i.$$

Ces points sont quatre par quatre sur les faces des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et sur les faces de trois nouveaux tétraèdres, qui, on le vérifiera sans peine, sont les suivants :

$$T'_1 \left\{ \begin{array}{llll} a & a_t & d & d_x, \\ a_y & a_z & d_y & d_z; \\ b_z & b_t & c_x & c_t, \\ b & b_z & c & c_y, \end{array} \right. \qquad T'_2 \left\{ \begin{array}{llll} a_y & b & c_t & d, \\ a_t & b_t & c_y & d_y, \\ a & b_x & c & d_z, \\ a_z & b_z & c_x & d_x, \end{array} \right. \qquad T'_3 \left\{ \begin{array}{llll} a_z & b_t & c & d, \\ a_y & b_x & c_y & d_x, \\ a & b & c_x & d_y; \\ a_t & b_z & c_t & d_z. \end{array} \right.$$

Les tétraèdres T_1, T_2, T_3 forment un système desmique, et il en est de même pour trois tétraèdres n'ayant pas d'indice commun, en exceptant le groupement T'_1, T'_2, T'_3. *Il y a donc en tout quatre systèmes desmiques dans la figure.* Enfin, dans chacun des couples

$$(T_1, T'_1), \quad (T_2, T'_2), \quad (T_3, T'_3),$$

les deux tétraèdres ont en commun un système d'arêtes opposées.

NOTE.

Quand la surface est trois fois tétraédroïde, les points doubles peuvent, comme nous l'avons montré, être répartis quatre par quatre sur les faces de trois tétraèdres qui forment un système desmique. D'après la définition même, les sommets de ces trois tétraèdres se répartissent trois par trois sur seize droites. On trouve aisément les sommets correspondants

de la manière suivante : Désignons par 1, 2, 3, 4, 1′, ..., 4′, 1″, ..., 4″ les faces de ces tétraèdres, d'après le Tableau

$$
T_1\left\{\begin{array}{ll} 1, & (a\,a_y a_z\,a_t), \\ 2, & (b\,b_z\,b_x\,b_t), \\ 3, & (c\,c_x c_y\,c_t), \\ 4, & (d\,d_x d_y d_z), \end{array}\right.
\qquad
T_2\left\{\begin{array}{ll} 1', & (a\ \ b_t\,c_y d_z), \\ 2', & (a_z b\ \ c_t\,d_x), \\ 3', & (a_t\ b_x c\ d_y), \\ 4', & (a_y b_z\,c_x d\ ), \end{array}\right.
\qquad
T_3\left\{\begin{array}{ll} 1'', & (a_t\,b\ \ c_x d_z), \\ 2'', & (a_y b_t\,c\ \ d_x), \\ 3'', & (a\ \ b_z c_t\,d_y), \\ 4'', & (a_z\,b_x c_y\,d\ ), \end{array}\right.
$$

et représentons aussi un sommet quelconque par la même notation que la face opposée.

Cela posé, considérons un plan singulier, $(aa_tbb_tcc_t)$ par exemple. Il contient trois centres d'involution en ligne droite, c'est-à-dire trois sommets correspondants des trois tétraèdres. Or, si l'on consulte le Tableau précédent, on voit que chaque face de ces tétraèdres contient deux des six points doubles appartenant au plan considéré, à l'exception des faces 4, 4′, 4″. Les sommets 4, 4′, 4″ sont donc trois sommets correspondants.

Les faces 4, 4′, 4″ ont un sommet commun; cette remarque permet de former rapidement le Tableau suivant :

11′3″,	21′2″,	31′4″,	41′1″,
12′4″,	22′1″,	32′3″,	42′2″,
13′1″,	23′4″,	33′2″,	43′3″,
14′2″,	24′3″,	34′1″,	44′4″.

Si l'on considère les chiffres comme représentant des sommets, trois sommets d'un même groupe sont en ligne droite; si les chiffres représentent des faces, trois faces d'un même groupe se coupent suivant une ligne droite.

On voit ainsi apparaître deux systèmes formés chacun de seize droites : chaque droite du premier système appartient à un plan singulier unique (et l'on a, d'après ce qui précède, le moyen d'établir la correspondance); chaque droite du second système passe par un point double.

Le lecteur pourra de même préciser sans difficulté les correspondances auxquelles donnent lieu les cas de l'involution quadruple et de l'involution sextuple.

[O8c]

NOTE DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

Par M. Vittorio NOBILE.

Je me propose d'indiquer ici quelques propriétés du mouvement d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur une droite fixe d. Je suppose que le corps ne puisse pas glisser, de manière que le mouvement se réduise à un roulement pur. Dans cette hypothèse le système est à un seul degré de liberté, et un seul paramètre suffira à déterminer le mouvement.

Si nous considérons la droite OM joignant le point fixe O avec le point de contact M du corps mobile avec d, il y aura une position où OM coupera orthogonalement d; c'est cette position que nous choisirons comme initiale ([1]).

Tous les points tels que M, considérés sur la surface du corps mobile, forment une ligne, que nous appellerons par analogie *polhodie*, dont la détermination est le premier problème qui se présente dans l'étude de ce mouvement.

Soit π le plan perpendiculaire à l'axe du corps et passant par O, et w la distance du point M à ce plan; soit en outre v l'angle des deux plans passant par l'axe du corps et respectivement par le point M et le point de la polhodie correspondant à la position initiale, et enfin

([1]) Il est évident que ce choix est absolument arbitraire, le mouvement du corps étant indépendant de la position initiale.

soit u la distance de M à l'axe. D'après ces définitions si

$$w = f(u)$$

est l'équation de la surface du corps, l'élément linéaire de toute ligne tracée sur cette surface est donné par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = du^2[1 + f'^2(u)] + u^2 dv^2.$$

Or, puisque la polhodie roule, dans le mouvement, sur la droite fixe, si nous comptons les arcs de polhodie à partir du point où $v = 0$, qui correspond sur la droite au point M_0, l'arc s sera égal, évidemment, au segment M_0M de la droite. Alors le triangle rectangle OM_0M nous fournit deux expressions de l'arc s, savoir

$$(2) \qquad \begin{cases} s = h \operatorname{tang}\theta, \\ s = \sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}. \end{cases}$$

Avec la deuxième de ces relations la formule (1) devient

$$\left(d\sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}\right)^2 = du^2[1 + f'^2(u)] + u^2 dv^2,$$

d'où l'on tire

$$dv = \pm \frac{du}{u}\sqrt{\left(\frac{d}{du}\sqrt{u^2 + f^2(u) - h^2}\right)^2 - [1 + f'^2(u)]},$$

ou encore, en effectuant la dérivation indiquée sous le radical

$$(3) \qquad dv = \pm \frac{du}{u}\sqrt{\frac{h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2}{u^2 + f^2(u) - h^2}},$$

qui est l'équation différentielle, en coordonnées polaires, de la projection de la polhodie sur le plan d'un parallèle.

2. Avant de continuer l'étude de la polhodie il faut préciser le sens des ϖ positives. Nous pouvons les compter de l'un ou de l'autre côté du point O, mais nous choisirons entre les deux directions celle qui forme avec le segment OM_0 un angle moindre que $\frac{\pi}{2}$. Ceci posé, puisque la droite fixe est la tangente de la polhodie au point M, on trouve par un raisonnement géométrique très simple la relation

$$(4) \qquad \frac{d\varpi}{ds} = \frac{s}{l},$$

où l est la distance, prise avec son signe, du point O au point où l'axe du corps est rencontré par la normale à la surface au point de contact. Cette relation nous montre qu'en général ([1]) dans la position initiale la courbe est tangente au parallèle du point de contact. Il est d'autre part évident que, dans ce cas, elle est symétrique par rapport au méridien de ce point. Pour voir si aux environs de la position étudiée la courbe est située au-dessous ou au-dessus du parallèle, il faudra voir si, au point considéré, ϖ a un maximum ou un minimum. Or on a, en considérant l comme une fonction de s,

$$(5) \qquad \frac{d^2\varpi}{ds^2} = \frac{1}{l} - \frac{s}{l^2}\frac{dl}{ds};$$

donc, si pour $s = 0$ la quantité $\frac{dl}{ds}$ ne devient pas infinie, on aura au point initial

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} = \frac{1}{l},$$

([1]) Le cas où l'on aurait dans la position initiale $l = 0$ sera examiné à part.

c'est-à-dire que, dans le voisinage de ce point, la courbe est située au-dessous ou au-dessus du parallèle selon que la normale à la surface coupe l'axe des w dans la région négative ou dans la positive.

Il est facile de voir que pour $s = 0$ $\frac{dl}{ds}$ reste finie. En effet, on trouve facilement

$$l = \frac{u - ww'}{w'}, \qquad \left[w' = \frac{dw}{du} = f'(u)\right],$$

d'où

$$\frac{dl}{ds} = \frac{dw}{ds} + \frac{w' - uw''}{w'^2}\,\frac{du}{ds},$$

et puisque

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{du}\,\frac{du}{ds},$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{dw}{ds}\left(1 + \frac{w' - uw''}{w'^3}\right),$$

qui pour $s = 0$ s'annule à cause du facteur $\frac{dw}{ds}$.

Si dans la position initiale $w' = 0$, l devient infini, la courbe est aussi tangente au parallèle, mais pour l'étudier il convient dans ce cas d'examiner la variation de u. On a

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{w'}\,\frac{dw}{ds} = \frac{s}{u - ww'},$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{u - ww'} - \frac{s^2(1 + w'^2 + ww'')}{(u - ww')^3},$$

et pour $s = w' = 0$

$$\frac{du}{ds} = 0, \qquad \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{u_0}.$$

Au point initial, u est donc minimum, et la projection de la polhodie touche extérieurement le cercle $u = u_0$.

3. Nous pouvons écrire

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{ds}\,\frac{ds}{dv},$$

ou encore

$$\frac{du}{dv} = \frac{s}{u + \varpi\varpi'}\,\frac{ds}{dv},$$

et si nous supposons que le roulement sur la droite fixe s'effectue toujours dans le même sens, $\frac{ds}{dv}$ garde toujours le même signe : alors le signe de $\frac{du}{dv}$ dépendra seulement du facteur

$$\frac{s}{u - \varpi\varpi'}.$$

Le signe de cette quantité change, en général, lorsque le corps passe par la position correspondante à la valeur $s = 0$, ensuite il dépend du signe de $u + \varpi\varpi'$. Cette considération fixe à chaque instant le signe à prendre devant le radical qui figure dans la formule

$$u\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{\frac{h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u\,f'(u)]^2}{u^2 + f^2(u) - h^2}}.$$

4. Nous allons maintenant étudier le cas où dans la position initiale on aurait $l = 0$, ce qui arrive lorsque OM_0 (¹) est la normale à la surface. Nous considérons d'abord le cas particulier, où le point de contact du corps avec la droite dans la position à étudier serait aussi le point de rencontre de la surface avec l'axe de révolution ; on aura alors en ce point

$$u = 0, \qquad f(u) = h, \qquad f'(u) = 0;$$

(¹) Il est impossible que cela arrive dans une autre position du corps, car le plan mené par le point de contact M perpendiculairement à la droite fixe doit contenir la normale à la surface.

par suite, si la fonction $f(u)$ est développable aux environs de $u = 0$ par la formule de Maclaurin, nous pouvons, en négligeant les puissances de u supérieures à la deuxième, poser

$$f(u) = h + \frac{\varepsilon}{2} u^2,$$

où $\varepsilon = f''(0)$. On trouve alors tout de suite

$$h^2[1 + f^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2 = h \varepsilon u^2 (1 - h \varepsilon),$$
$$u^2 + f^2(u) - h^2 = u^2(1 + h\varepsilon),$$

après avoir supprimé les termes en u^3 et en u^4. Alors

$$(6) \qquad \frac{u\,dv}{du} = \sqrt{h\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon < 0$ au point $u = 0$, $f(u)$ a un maximum, la surface tourne donc sa concavité vers le point fixe O, et sa convexité à la droite fixe. Dans ces conditions la formule (6) nous montre qu'autour de ladite position le mouvement est impossible, ce qui était d'ailleurs évident. Si $\varepsilon > 0$ la surface tourne sa convexité au point O. Dans ce cas on voit par la formule (6) que la projection de la polhodie se confond, aux environs du point $u = 0$ avec une *spirale logarithmique;* il s'ensuit que, si au point de départ on a $u = 0$, le corps pivotera indéfiniment autour de son axe de révolution, mais s'il part d'une autre position quelconque, et d'ailleurs parfaitement arbitraire, *il pourra s'approcher autant que l'on voudra de la position où* $u = 0$, *sans jamais l'atteindre.*

5. Plaçons-nous maintenant dans le cas général où dans la position à étudier u serait > 0. Nous pouvons écrire ici

$$f(u) = f_0 + (u - u_0) f'_0 + \frac{1}{2} (u - u_0)^2 f''_0.$$

où $f = f(u_0)$, $f^{(i)} = f^{(i)}(u_0)$. De cette formule on tire, en négligeant les puissances de $(u - u_0)$ supérieures à la deuxième,

$$1 + f'^2(u) = 1 + f'^2 + (u - u_0)^2 f''^2 + 2(u - u_0) f' f'',$$
$$f(u) - u f'(u) = f - u_0 f' - \tfrac{1}{2}(u^2 - u_0^2) f'',$$

et, en tenant compte des relations

$$(7) \qquad \begin{cases} u_0^2 + f^2 = h^2, \\ u_0 + f f' = 0, \end{cases}$$

dont la seconde exprime que OM_0 est normale à la surface, on obtient la valeur de l'expression

$$h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2,$$

savoir

$$(u - u_0)^2 [u_0^2 + f^2 - \tfrac{1}{4}(u + u_0)^2] f''^2$$
$$+ (u - u_0)[2(u_0^2 - f^2) - u_0(u + u_0)] f' f'' + (u^2 - u_0^2) f f''.$$

On peut simplifier, car si l'on groupe les deux derniers termes, leur somme est

$$(u - u_0)(2 f^2 f' - u u_0 f' + u_0^2 f' + u f - u_0 f) f'',$$

ou, ayant égard à la deuxième des formules (7)

$$(u - u_0)^2 (f - u_0 f') f''.$$

Donc

$$h^2[1 + f'^2(u)] - [f(u) - u f'(u)]^2$$
$$= (u - u_0)^2 [f(1 + f'^2 + f f'') - \tfrac{1}{4}(3 u_0 + u)(u - u_0) f''] f''.$$

D'une manière analogue on trouve, après quelques réductions et à l'aide de la deuxième des formules (7)

$$u^2 + f^2(u) - h^2 = (u - u_0)^2 (1 + f'^2 + f f''),$$

donc

$$(8) \qquad \frac{u\, dv}{du} = \pm \sqrt{f f'' - \frac{1}{4} f''^2 \frac{(3 u_0 + u)(u - u_0)}{1 + f'^2 + f f''}}.$$

Cette quadrature peut toujours être effectuée en rendant rationnelle la différentielle par une substitution convenable, mais sans entrer dans ces détails l'équation (8) met en évidence une particularité remarquable. Si l'on considère le corps arrivé à la position qui correspond à $u = u_0$, on aura

$$u_0 \left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm \sqrt{ff''},$$

ou, en substituant à f le rapport $-\frac{u_0}{f'}$ et en divisant par u_0,

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm \sqrt{-\frac{f''}{u_0 f'}}.$$

Cette équation, si l'on y considère u et v variables, est l'équation différentielle de la projection, sur le plan d'un parallèle, des lignes asymptotiques de la surface $w = f(u)$; nous pouvons donc conclure que dans la position que nous avons considérée *la polhodie touche une des lignes asymptotiques passant par le point de contact du corps et de la droite fixe.* Dans ce cas, la polhodie ne touche pas le parallèle du point M_0, $\frac{du}{dv}$ ne change pas de signe, et prend, pour $u = u_0$, le signe $+$ ou $-$ selon que la courbe touche l'une ou l'autre des deux asymptotiques, ce qui arrive, comme l'on voit facilement à l'aide de la formule

$$\frac{du}{dv} = \frac{s}{u + ww'} \frac{ds}{dv},$$

selon que le corps tend à la position où $u = u_0$ en partant de l'une ou de l'autre de deux positions symétriques par rapport au plan mené par O perpendiculairement à la droite fixe.

6. La propriété de la polhodie que nous venons de signaler pouvait être prévue en s'appuyant sur une remarque que nous ferons dans la suite. Nous verrons que la perpendiculaire menée du point de contact M à la droite fixe dans le plan de cette droite et du point O est la binormale de la polhodie; or, comme dans le cas étudié, cette droite est normale à la surface, on voit immédiatement que la polhodie doit toucher une des asymptotiques. Toutefois, ce raisonnement n'est pas général, car on voit qu'il présuppose que la polhodie ait, dans la position considérée, une tangente bien déterminée; lorsque cela n'arrive pas, le raisonnement tombe en défaut, et conduit à des résultats erronés. Cela arrive lorsque $u_0 = 0$, car alors, après avoir obtenu

$$u_0\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{-\frac{u_0 f''}{f'}},$$

il n'est pas loisible de diviser par u_0, et en conclure

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = \pm\sqrt{-\frac{f''}{u_0 f'}}.$$

Nous avons un exemple de ce fait dans le cas précédent où $u_0 = f'(u_0) = 0$. En effet, lorsque $f'' > 0$ la polhodie se confond, ainsi que nous venons de voir, avec une spirale logarithmique; le mouvement est donc réel, tandis qu'avec le raisonnement précédent on conclurait à l'impossibilité du mouvement, parce que le point considéré est un point elliptique de la surface où les lignes asymptotiques deviennent imaginaires. C'est pour cette raison que nous avons préféré la voie analytique qui est rigoureuse, et met bien en lumière ce cas d'exception.

Nous voyons ainsi que le mouvement est impossible dans la position considérée, lorsque dans cette position le point de contact est un point elliptique de la surface.

7. *Expression de la vitesse angulaire.* — Il est évident que la droite joignant le point fixe O au point de contact M est l'axe instantané de rotation du corps roulant : donc, si nous imaginons réalisée la surface conique que l'on obtient en joignant O à tous les points de la polhodie, le mouvement du corps pourra être obtenu en faisant rouler ce cône sur le plan du point O et de la droite d. Il s'agit donc de trouver la vitesse angulaire du cône roulant. Si nous indiquons par $d\varphi$ l'angle de deux plans tangents au cône infiniment voisins, et par ω la vitesse angulaire dont nous cherchons l'expression, nous avons

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Imaginons maintenant la polhodie comme une courbe tracée sur le cône que nous avons considéré; pendant que le cône roule, la polhodie roule aussi sur la droite fixe d. Donc, si nous supposons que l'on ait développé le cône sur le plan où il roule, la polhodie doit coïncider, après le développement, avec la droite α; cela suffit pour affirmer qu'elle est une ligne géodésique du cône. Il s'ensuit que la droite menée par M perpendiculairement au plan passant par O et par d, qui est la normale au cône, est aussi la binormale de la polhodie; si nous indiquons donc avec ε et η respectivement l'angle de contingence et l'angle de torsion, nous avons par la formule de Lancret

$$d\varphi^2 = \varepsilon^2 + \eta^2,$$

et, puisque

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \qquad \eta = \frac{ds}{r},$$

(9)
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}\,\frac{ds}{dt}.$$

On peut encore simplifier cette formule en s'appuyant

sur une propriété commune aux lignes géodésiques de toute surface conique. Ces lignes jouissent de la particularité d'avoir une des deux équations intrinsèques indépendante de la nature du cône, et par suite invariable. Cette équation ([1]) est

$$sr = h\rho, \tag{10}$$

h étant la distance du sommet du cône au point de la courbe où elle coupe à angle droit la génératrice, c'est-à-dire la quantité que nous avons déjà appelée h. On peut avec l'équation (10) éliminer r de l'expression de ω, et l'on obtient

$$\omega = \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{h\rho} \frac{ds}{dt}. \tag{11}$$

Si l'on veut ω en fonction de l'angle $\theta = \widehat{M_0OM}$, il faut substituer à s, $h \operatorname{tang}\theta$ et il vient

$$\omega = \frac{h}{\rho \cos^3\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

8. Si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale principale à la polhodie par rapport à trois axes orthogonaux issus du point O, on a

$$d\sigma^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 :$$

pour avoir donc les composantes p, q, r de la rotation, il faut connaître $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ dont les expressions sont données par les formules de Frenet

$$d\lambda = -(a\xi + \alpha\eta),$$
$$d\mu = -(b\xi + \beta\eta),$$
$$d\nu = -(c\xi + \gamma\eta).$$

([1]) Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 144, Napoli, 1896.

a, b, c et α, β, γ étant respectivement les cosinus directeurs de la tangente et de la binormale. Il faudrait donc calculer les quantités qui figurent dans les seconds membres en fonction de s. Mais pour les applications dynamiques, si l'on veut étudier le mouvement dans le cas très fréquent où les forces agissant sur le corps dériveraient d'un potentiel U, il est inutile de connaître les expressions de p, q, r; mais il faut seulement trouver la force vive T, et l'on y arrive très facilement. Choisissons une terne d'axes fixes dans le corps et ayant l'origine au point O; soit Oz l'axe de révolution et Ox et Oy deux droites quelconques perpendiculaires à Oz et se coupant mutuellement à angle droit.

Si le corps est homogène et si on le considère tout entier, ou une portion comprise entre deux plans perpendiculaires à Oz, l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O est de révolution et son équation est

$$A(x^2+y^2)+Bz^2=1,$$

la signification de A et B étant connue. Alors, u, v, w étant les coordonnées du point de contact, le moment d'inertie par rapport à l'axe instantané de rotation est

$$I=\frac{Au^2+Bw^2}{u^2+w^2}=\frac{Au^2+Bf^2(u)}{s^2+h^2}$$

et, puisque

$$2T=I\omega^2,$$

on a

$$(12)\qquad 2T=\frac{Au^2+B f^2(u)}{h^2\rho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

où il reste à calculer u et ρ en fonction de s, dans les cas particuliers.

9. *Surface engendrée par l'axe de révolution.* — Imaginons un cône circulaire C dont le sommet soit le

point fixe O et dont l'axe coïncide avec l'axe instantané de rotation. Supposons, en outre, que la surface de ce cône contienne l'axe du corps; on voit aussitôt que tous les cônes, tels que C, constituent une famille simplement infinie dont l'enveloppe est la surface engendrée dans le mouvement par l'axe de révolution du corps mobile.

On doit donc d'abord établir un terne d'axes fixes, puis obtenir l'équation générale des cônes C renfermant un seul paramètre, s par exemple, et ensuite éliminer s entre les équations

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y, z, s) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Établissons maintenant le système d'axes fixes dans l'espace. Le plan passant par O et par la droite fixe d soit le plan xy; la perpendiculaire et la parallèle menées à la droite d par le point O soient respectivement Ox et Oy. Ceci posé, les cosinus directeurs de l'axe instantané par rapport à ces axes sont évidemment

$$\frac{h}{\sqrt{s^2+h^2}}, \quad \frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}, \quad 0.$$

En outre, indiquant par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P du cône C correspondant à la valeur s, les cosinus directeurs de OP sont

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

le cosinus de l'angle de ces deux droites est donc

$$\frac{hx+sy}{r\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Nous avons d'autre part une autre expression de cette

même quantité, savoir

$$\frac{\varpi}{\sqrt{u^2-\varpi^2}} = \frac{\varpi}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

En égalant les deux expressions, on a l'équation générale des cônes C

$$(13)\qquad (hx + sy)^2 = \varpi^2 r^2,$$

où il faut imaginer ϖ exprimé en fonction de s.

L'équation de la surface cherchée résultera de l'élimination de s entre les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} r^2\varpi^2 = (hx + sy)^2, \\ r^2\varpi\dfrac{d\varpi}{ds} = hxy + sy^2. \end{cases}$$

On ne peut effectuer cette élimination que dans les cas particuliers, à cause de ϖ et $\frac{d\varpi}{ds}$, qui sont des fonctions de s dont la forme dépend de la surface du corps mobile et de sa position par rapport à la droite fixe; si l'on connaît la fonction $\varpi = f(u)$ et la quantité h, les deux relations

$$\begin{cases} u = \varphi(\varpi), \\ s^2 = u^2 + \varpi^2 - h^2, \end{cases}$$

permettent d'exprimer ϖ et, par suite, $\frac{d\varpi}{ds}$, en fonction de s.

10. Il y a cependant un cas particulier important que nous allons montrer. Supposons que l'on ait toujours

$$(15)\qquad \varpi^2 - \varpi s\frac{d\varpi}{ds} = k^2,$$

k étant une constante, et voyons les cas dans lesquels

cette relation peut se vérifier. On peut l'écrire

$$\frac{ds}{s} = \frac{w\,dw}{w^2 - k^2}.$$

Intégrant et indiquant par k_1 une seconde constante, nous avons

$$k_1 s = \sqrt{w^2 - k^2}.$$

Élevant au carré et substituant à s^2 sa valeur

$$s^2 = u^2 + w^2 - h^2,$$

nous obtenons

(15′) $$k_1^2(u^2 + w^2 - h^2) = w^2 - k^2.$$

Cette équation peut s'écrire en coordonnées cartésiennes en posant

$$u^2 = x^2 + y^2, \qquad z^2 = w^2.$$

Elle devient alors

(15″) $$\frac{(k_1^2 - 1)}{h^2 k_1^2 - k^2} z^2 + \frac{k_1^2}{h^2 k_1^2 - k^2}(x^2 + y^2) = 1,$$

et comme les coefficients de z^2 et $(x^2 + y^2)$ sont indépendants, on voit que cette équation peut représenter toute quadrique de révolution ayant le centre au point fixe O, et, pour ces surfaces, vaut l'équation (15).

Cherchons maintenant la surface engendrée par l'axe de révolution. On peut remplacer le système (14) par l'autre

(16) $$\begin{cases} r^2\left(w^2 - ws\dfrac{dw}{ds}\right) = hx(hx + sy), \\ r^2 w\dfrac{dw}{ds} = hxy + sy^2. \end{cases}$$

La première de ces équations, dans notre cas, devient

$$k^2 r^2 = hx(hx + sy).$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{k^2 r^2 - h^2 x^2}{h x y}. \tag{17}$$

En outre, puisque

$$\frac{w\,dw}{ds} = \frac{w^2 - k^2}{s}, \qquad w^2 - k^2 = k_1^2 s^2,$$

on a

$$\frac{w\,dw}{ds} = k_1^2 s;$$

alors la seconde des équations (16) prend la forme

$$r^2 k_1^2 s = h x y + s y^2.$$

Introduisant l'expression (17) on obtient, après quelques réductions, l'équation

$$k^2 k_1^2 r^2 - h^2 k_1^2 x^2 - k^2 y^2 = 0, \tag{18}$$

qui représente un cône du second degré. Donc :

Lorsqu'une quadrique de révolution est mobile autour de son centre fixe, et roule sans glisser sur une droite fixe, l'axe de révolution engendre un cône du second degré.

Les axes de ce cône coïncident évidemment avec les axes des coordonnées.

Le cône que nous avons trouvé peut quelquefois se réduire à un plan ou à un couple de plans ; ce cas se présente, par exemple, lorsque $k = h$. En effet, l'équation trouvée devient alors

$$k_1^2 (y^2 + z^2) = y^2$$

ou

$$z = \pm y \sqrt{\frac{1}{k_1^2} - 1}, \tag{19}$$

et représente, comme l'on voit, deux plans se coupant suivant l'axe Ox. Quelle est la surface correspondante

à ce cas? L'équation (15′) devient, dans ce cas,

$$u^2 = (w^2 - h^2)\left(\frac{1}{k_1^2} - 1\right), \tag{20}$$

Si $k_1 < 1$, l'équation (19) représente deux plans réels et l'équation (20) *un hyperboloïde à deux nappes dont le demi-axe réel est h.*

Si $k_1 > 1$, nous avons un ellipsoïde de révolution allongé dont le demi-axe de révolution est h et le demi-axe équatorial est $h\sqrt{1 - \frac{1}{k_1^2}}$; dans ce cas nous savons, *a priori*, que le mouvement est impossible; cependant, l'équation (19) confirme ce fait, car elle représente, pour $k_1 > 1$, deux plans imaginaires.

[13b]

SUR LES NOMBRES PREMIERS;

Par M. H. LAURENT.

Je me propose, dans ce travail, d'étudier les propriétés des nombres premiers, en me plaçant à un point de vue qui ne me semble pas encore avoir été envisagé. On ne connaît guère qu'un théorème, celui de Wilson, relatif aux nombres premiers et qui distingue ces nombres des autres entiers. Je commencerai par démontrer un théorème que je crois nouveau et qui ne semble pas découler du théorème de Wilson :

Si l'on considère le produit

$$F_n(x) = \left\{\begin{array}{l} (1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^{n-1}), \\ (1 - x^2)(1 - x^4)\ldots(1 - x^{2n-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (1 - x^{n-1})(1 - x^{2n-2})\ldots(1 - x^{(n-1)^2}); \end{array}\right.$$

1° *Il se réduit à* n^{n-1} *si* n *est premier et à zéro si* n *est composé quand on y remplace* x *par une racine imaginaire de* $x^n - 1 = 0$,

2° *Si on le divise par* $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, *le reste est* 0, *si* n *est composé, il est* n^{n-1} *si* n *est premier;*

3° *Le résidu de*

$$\frac{F_n(x)}{(x^n - 1)},$$

relatif aux racines de $x^n - 1 = 0$ *est égal à* $-n^{n-2}$.

La première partie du théorème est presque évidente, car si n est composé et si α désigne une racine de $x^n - 1 = 0$, cette racine sera primitive ou ne le sera pas; en tout cas si elle l'est, une de ses puissances ne le sera pas, et si α^i est cette puissance $(1 - \alpha^i)(1 - \alpha^{2i})\ldots(1 - \alpha^{ni-i})$ sera nul et $F_n(\alpha)$ sera nul. Si n est premier toutes les racines α de $x^n - 1 = 0$ sont primitives, toutes les lignes du produit $F_n(x)$ sont égales, pour $x = \alpha$, au produit

$$(z - \alpha)(z - \alpha^2)\ldots(z - \alpha^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} \qquad (\text{pour } z = 1)$$

on a n; en sorte que

$$F_n(\alpha) = n^{n-1}.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème énoncé, j'observe que, $Q(x)$ désignant un polynome entier, on a

$$\frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \sum_1^n \frac{F_n(\alpha_i)}{x - \alpha_i}\frac{\alpha_i}{n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ désignant les racines imaginaires de $x^n - 1 = 1$. Si n est composé, on a

$$F_n(\alpha_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x).$$

et $F_n(x)$ est divisible par $(x^n - 1)$ et, *a fortiori*, par $\frac{x^n - 1}{x - 1}$. Si n est premier,

$$\text{(1)} \qquad \frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \sum \frac{n^{n-2}\alpha_i}{x - \alpha_i};$$

Or

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\sum \frac{\alpha_i}{x - \alpha_i} + \frac{1}{n}\frac{1}{x - 1};$$

tirons de là

$$\sum \frac{\alpha_i}{x - \alpha_i} = \frac{n}{x^n - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

pour le porter dans (1), et nous aurons

$$\frac{F_n(x)}{x^n - 1} = Q(x) + \frac{n^{n-1}}{x^n - 1} - \frac{n^{n-2}}{x - 1}$$

ou

$$F_n(x) = Q(x)(x^n - 1) - n^{n-1}\frac{x^n - 1}{x - 1} + n^{n-1}$$

ou

$$F_n(x) = \left[Q(x)(x - 1) - n^{n-2}\right]\frac{x^n - 1}{x - 1} + n^{n-1}.$$

C. Q. F. D.

Enfin, la troisième partie du théorème se démontre en observant que (on ne prend pas le résidu relatif à $x = 1$) en vertu de (1)

$$\mathcal{E}\,\frac{F_n(x)}{x^n - 1} = -\,n^{n-2}.$$

Cela posé, je considère l'équation (1) et j'y remplace x par $\frac{x}{n}$, elle devient

$$\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\left(\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)} = Q\left(\frac{x}{n}\right) + \sum \frac{n^{n-1}\alpha_i}{x - n\alpha_i} \qquad \text{si } n \text{ est premier,}$$

$$= Q\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{si } n \text{ est composé}$$

Prenons encore les résidus en excluant la valeur $x = 1$, nous aurons

$$\mathcal{E} \frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)^n - 1} = -n^{n-1} \qquad \text{si } n \text{ est premier,}$$

$$= 0 \qquad \text{si } n \text{ est composé.}$$

Or la série

$$-\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x^n}{n^n} - 1\right) n^{n-1}} = f(x)$$

est évidemment convergente quand x n'est pas racine d'une équation $\left(\frac{x}{n}\right)^i - 1 = 0$; et le résidu de $f(x)$ relatif à une couronne circulaire C formée de deux cercles concentriques à l'origine, l'un de rayon très petit, l'autre de rayon R compris entre n et $n+1$, sera égal à la totalité des nombres premiers compris entre 0 et $n+1$. Plus généralement, si l'on pose

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n - 1\right] n^{n-i-1}} = f_i(x),$$

et si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ désignent les nombres premiers compris à l'intérieur de la couronne C, on aura

$$-\mathcal{E} f_i(x) = \sum \frac{1}{p^i}.$$

En faisant grandir R indéfiniment, on pourra calculer $\sum \frac{1}{p^i}$ pour tous les nombres premiers.

Enfin, si l'on pose

$$\theta(z) = \left(1 - \frac{z^2}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{p_2^2}\right) - \ldots$$

on aura

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{2z}{z^2 - p_1^2} - \frac{2z}{z^2 - p_2^2} + \ldots$$

et

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = -\mathcal{L} \sum \frac{\mathrm{F}_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n \quad 1\right] n^{n-1}} \frac{z}{z^2 - x^2}.$$

Nous avons ainsi le moyen de former une équation admettant pour racines tous les nombres premiers et seulement les nombres premiers.

Le théorème de Wilson conduit à un résultat analogue en observant que

$$\frac{x^{\Gamma(n)} - 1}{x^{n} - 1}$$

est un polynome entier si n est composé et que le reste de la division de $x^{\Gamma(n)} - 1$ par $x^n - 1$ est $x^{n-1} - 1$, si x est un nombre premier.

On peut trouver plus simplement le nombre des entiers premiers compris entre x_0 et X comme il suit :

Le produit

$$\theta(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{\frac{\pi x}{3}} \cdots \frac{\sin\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \cdots$$

est évidemment convergent quel que soit x; car le facteur général est de la forme

$$1 - \frac{\lambda\pi^2 x^2}{6n^2} \; (0 < \lambda < 1);$$

la fonction $\theta(x)$ s'annule pour $x = n$, une fois si n est premier, et, en général, plusieurs fois si n est composé, en sorte que $\frac{\theta(x)}{\sin \pi x}\pi x$, sans devenir infinie, n'a plus

pour zéros que les nombres composés :

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}$$

a alors pour infinis simples les nombres composés, et

$$\frac{1}{\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \dfrac{1}{x}}$$

aura pour zéros simples les nombres composés ; enfin

$$\frac{\pi x}{\sin \pi x \left[\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x - \dfrac{1}{x}\right]} = f(x)$$

aura pour infinis simples les nombres premiers.

Or on sait que, si la fonction $f(x)$ a pour infinis simples n nombres compris entre x_0 et X,

$$n\pi + \text{arc tang} f(\mathrm{X}) - \text{arc tang} f(x) = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \frac{f'(x)\,dx}{1 + f^2(x)},$$

les arc tang étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On pourra donc poser

$$n + \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \frac{f'(x)\,dx}{1 + f^2(x)},$$

ε désignant un nombre toujours facile à calculer et moindre que l'unité. Nous appliquerons cette formule à la recherche des nombres composés en nombre c compris entre x_0 et X ; alors

$$(1) \qquad c + \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int^{\mathrm{X}} \frac{d\left[\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \dfrac{1}{x}\right]}{1 + \left[\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \dfrac{1}{x}\right]^2},$$

on a, pour $|x| < 1$,

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} = -2\left(\frac{1}{x^2 - n^2} + \frac{1}{x^2 - 4n^2} + \ldots\right),$$

et, en posant

$$S_i = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \ldots,$$

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} = 2\left(\frac{s_2}{n^2} + \frac{s_4 x^2}{n^4} + \frac{s_6 x^4}{n^6} + \ldots\right),$$

$$\sum_1^\infty\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x}\right) = 2(s_2^2 + s_4^2 x^2 + s_6^2 x^4 + \ldots).$$

On en conclut

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi\cot\pi x + \frac{1}{x} = x[(s_2^2 - 2s_2) + (s_4^2 - 2s_4)x^2 + \ldots].$$

Cette formule n'a lieu que si $|x| < 1$; néanmoins, en multipliant ses deux membres par

$$\sin\pi x = \frac{\pi x}{1} - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \ldots,$$

on obtiendra une formule vraie pour $|x| > 1$, les deux membres de la nouvelle formule étant symétriques dans toute l'étendue du plan; en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x et en multipliant par $\sin^2\pi x$, on obtiendra encore une formule valable pour toutes les valeurs de x; en sorte que (1) prendra la forme

$$c + \varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{X}\frac{b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots}{\sin^2\pi x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots}\,dx,$$

les a et les b désignant des nombres faciles à calculer; ou

même en appelant $\alpha_2, \alpha_4, \ldots$ de nouvelles constantes,

$$c + \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{X} \frac{b_2 x^2 + \ldots}{\alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \ldots} dx$$

ou

$$c + \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{X} \frac{b_2 + b_4 x^2 + \ldots}{\alpha_2 + \alpha_4 x^2 + \ldots} dx.$$

Il résulte de là qu'il existe une fonction

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}\right] \sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x + \left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \pi \cot \pi x + \frac{1}{x}\right]^2 \sin^2 \pi x}$$

qui est le quotient de deux fonctions synectiques, et dont l'intégrale entre les limites x_0 et X donne à une unité près le nombre des entiers composés compris entre ces limites, et l'on a le développement en série du numérateur et du dénominateur de $\psi(x)$.

CORRESPONDANCE.

L'abbé Issaly. — *Sur la question* 1727. — Dans le numéro de février des *Nouvelles Annales,* M. Tzitzéica résout la question 1727, que, vers 1885 environ, j'avais adressée au regretté Ch. Brisse.

Je n'ai qu'à féliciter l'Auteur pour la méthode élégante qu'il emploie dans les paragraphes 1° et 3°. Mais il n'en est pas ainsi de 2°. M. Tzitzéica y tombe précisément dans la faute que j'ai commise, tout le premier, en attribuant à la surface F′ une aire beaucoup trop simple. En effet, la formule

$$A = \pi\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)\sqrt{R_1 R_2}$$

définit l'aire de la surface F' *sphéricisée*, en quelque sorte, par la projection de ses éléments fuséiformes successifs sur les fuseaux correspondants des sphères de même diamètre; et comme aux points homologues, les plans tangents sont tout à fait différents, sur les deux surfaces, l'expression des aires n'est pas la même dans les deux.

Vous trouverez, Monsieur, dans un Mémoire que je vous adresse, et qui date de 1889, la correction de cette inexactitude. Elle m'a fourni l'occasion de signaler, à cette époque, trois propriétés principales de ces surfaces, *artificiellement* construites, si l'on veut, que j'ai nommées des *hémicyclides*. Les résultats simples et nullement stériles qu'elles fournissent, en réalité, me semblent leur mériter d'être prises en sérieuse considération.

C'est à vous de décider s'il convient d'attirer l'attention de vos abonnés sur l'illusion séduisante que la question ne manque pas de produire, au premier aspect. Cela fournira peut-être à un amateur l'occasion de chercher l'expression vraie de l'aire de F', en développant la formule que j'en donne dans mon Mémoire.

A. de Saint-Germain. — *Sur la question* 1727. — L'énoncé de la question 1727 et la solution de M. Tzitzéica (février 1889, p. 95) donnent une expression simple, malheureusement inexacte, pour l'aire A d'une surface F', lieu (suivant les notations de l'auteur) des centres de courbure en O des sections faites dans une surface F par tous les plans qui passent en O. Regardons F' comme engendrée par une demi-circonférence OMP dont le diamètre OP est dirigé suivant la normale OZ et égal au rayon de courbure R de la section faite dans F par le plan OMP. Au fuseau OMPP'M'O, limité par la demi-circonférence OMP et la demi-circonférence infiniment voisine, M. Tzitzéica substitue un fuseau sphérique égal à $\frac{1}{2}R^2 d\theta$ et en déduit facilement A.

La substitution n'est pas légitime, comme elle le sera dans le calcul de V.

Pour évaluer A, je fais ZOM $= \varphi$ et j'ai, pour les coordonnées d'un point M,

$$x = R \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta, \quad y = R \sin\varphi \cos\varphi \sin\theta, \quad z = R \cos^2\varphi;$$

R est une fonction de θ donnée par la formule d'Euler. On a

$$dA = d\theta\, d\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \ldots};$$

le calcul donne sans difficulté

$$dA = R\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi \sqrt{R^2\sin^2\varphi + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 \cos^2\varphi}.$$

La Géométrie conduit rapidement au même résultat. Pour avoir le fuseau OMPP'M'O, on intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$: l'intégrale s'exprime par des fonctions élémentaires, mais n'est égale à $\frac{1}{2}R^2 d\theta$ que si $\frac{dR}{d\theta}$ est nul. L'intégration relative à θ amènera ensuite des fonctions très transcendantes.

QUESTIONS.

525 (**1860**, 234). Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$f(x) = 0,$$

que nous écrivons sous la forme maintenant bien connue

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0;$$

posons

$$A_m = a_0^{2n-1} \sum \frac{x_1^m f'(x_2) f'(x_3) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' est la dérivée de f; démontrer que la forme

$$(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

(Michael Roberts.)

528. (**1860**, 247). — Le nombre figuré par 1121 ne peut être un carré parfait dans aucun système de numération.

(ROUCHÉ).

546. (**1860**, 404). — Étant donnée une conique A, trouver les transformations qui la changent en une conique B, de telle sorte que les normales à la conique A restent par la transformation normales à la conique B. Même question pour les surfaces. (LAGUERRE-VERLY).

549. (**1860**, 405). — Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une courbe du troisième ordre, qui passe, comme on sait, par les six sommets du quadrilatère complet; mais elle passe aussi par les *pieds* des hauteurs du triangle déterminé par les trois diagonales du quadrilatère, et comme elle passe d'ailleurs par les deux points situés *à l'infini* sur un cercle, cette courbe doit occuper parmi les courbes du troisième ordre le même rang que le cercle dans les coniques; ainsi elle a comme le cercle un double foyer.

(FAURE).

1822. Étant donnée une conique C de foyers F et F′, on considère une parabole P de foyer F dont la directrice δ passe par F′. Soit Δ la directrice de la conique C correspondant au foyer F. Démontrer que les tangentes communes à la conique C et à la parabole P touchent ces courbes aux points où elles sont rencontrées respectivement par les doites δ et Δ (1).

(M. D'OCAGNE.)

1823. Deux coniques C et C_1 ont en commun le foyer F auquel correpondent pour chacune d'elles les directrices Δ et Δ_1 qui se coupent au point D. Démontrer que les tangentes communes à ces coniques passent par le point de rencontre de la droite qui joint les deux autres foyers F′ et F'_1 et de la perpendiculaire élevée en F à la droite FD. (M. D'OCAGNE.)

---

(1) Les théorèmes qui font l'objet de cette question et de la suivante ont été obtenus par l'auteur par voie de transformation géométrique (*N. A.*, 3e série, t. XIV, p. 359). On en demande ici, à titre d'exercices, des démonstrations directes. (N. D. L. R.).

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899.

Sujet.

L'équation d'un cercle rapporté à deux axes rectangulaires, situés dans son plan, peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 - u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

en posant

$$(2) \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad \frac{x^2 + y^2 - 1}{2} = x_3, \quad \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} = x_4,$$

de sorte que les variables x_1, x_2, x_3, x_4 *satisfont à la relation*

$$(3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

On peut appeler les quatre quantités u_1, u_2, u_3, u_4 *les coordonnées du cercle, et l'on peut dire :* 1° *que toute relation homogène entre ces quatre quantités définit un* réseau *de cercles;* 2° *que deux relations homogènes définissent une* série *de cercles;* 3° *que trois relations homogènes définissent un* système *de cercles. On peut classer les réseaux et les séries de cercles d'après les degrés des équations qui les définissent.*

I. *Interpréter, en Géométrie à trois dimensions, les équations* (1) *et* (2), *qui définissent le cercle, et les formules* (3), *qui conduisent à cette*

définition. En déduire les propriétés des réseaux et des séries linéaires de cercles.

II. *Étudier en particulier et aussi complètement que possible les propriétés des réseaux quadratiques, c'est-à-dire des réseaux définis par une équation homogène et du second degré en u_1, u_2, u_3, u_4. Rapprocher ces propriétés de celles des surfaces du second ordre.*

III. *Montrer comment l'étude des systèmes de cercles faite d'après cet ordre d'idées permet de construire un cercle tangent à trois cercles donnés par une méthode différente de la célèbre méthode de Gergonne.*

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de M. Gauthier-Villars ;

2° A la publication du Mémoire ;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 NOVEMBRE 1899, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification

de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 novembre et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 décembre 1899, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[B12c] [K9a]

APPLICATIONS DES MÉTHODES DE GRASSMANN [1]; VECTEURS DANS LE PLAN; DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS;

Par M. F. CASPARY.

1. *Notions préliminaires.* — Soient A, B, C trois points quelconques; les différences C — B, A — C, B — A représentent alors (voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 391, 1898; définition 4°) des vecteurs dans le plan A, B, C, définis en grandeur, sens et direction.

Dans ce Mémoire, je ne m'occupe que des vecteurs dans le plan. Pour les désigner, j'emploierai dès lors les minuscules de l'alphabet latin *en caractères gras*; conséquemment je pose

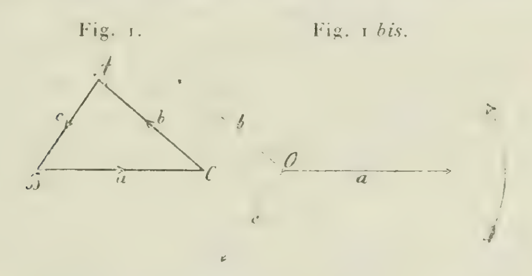
$$(1)\qquad \begin{cases} C - B = \mathbf{a}, \\ A - C = \mathbf{b}, \\ B - A = \mathbf{c}. \end{cases}$$

Quant à la *grandeur* (longueur) des vecteurs, j'emploie, pour la désigner, les minuscules de l'alphabet latin en *caractères romains*, de façon que les longueurs des vecteurs **a**, **b**, **c** sont désignées par a, b, c. Par conséquent, les caractères a, b, c représentent les côtés BC, CA, AB du triangle ABC (*fig.* 1).

Comme les *vecteurs* sont définis en grandeur, sens et direction, *ils peuvent être transportés, dans le plan, parallèlement à eux-mêmes*. De là résulte que le vecteur **a**, défini jusqu'à présent par C — B, représente aussi chaque vecteur du plan, ayant la longueur a, étant

[1] Voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 389; 1898.

parallèle à **a** et de même sens que **a**. En désignant un vecteur qui possède ces trois propriétés par **a**′, on aura **a**′ = **a**. Réciproquement l'égalité **a**′ = **a** exprime que les deux vecteurs **a**′ et **a** sont parallèles, de même longueur et de même sens. De plus, l'égalité **a**′ = — **a** exprime que les deux vecteurs **a**′ et **a** sont parallèles, de



même longueur, mais de sens opposé. Enfin l'égalité **a**′ = λ**a** exprime que les deux vecteurs **a**′ et **a** sont parallèles, que leurs longueurs a′ et a sont dans le rapport λ : 1, et que leur sens est le même ou opposé, suivant que λ est positif ou négatif.

Pour désigner, dans les figures (diagrammes), le sens d'un vecteur, j'emploierai une *flèche* dont la pointe marque la direction positive.

Comme les vecteurs peuvent être transportés parallèlement à eux-mêmes, à un diagramme quelconque correspond un autre diagramme, où les vecteurs sont issus d'un même point O. Je donne à ce point O le nom de *pôle*, et j'appelle conséquemment le diagramme correspondant *diagramme polaire*. Le diagramme polaire met en évidence les *relations angulaires*, si l'on fixe encore un *sens de rotation*. Dans les articles suivants, j'emploierai comme *sens de rotation le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre*.

Ceci établi, j'appelle *angle formé par les vecteurs* **a**

et **b** *l'angle que la direction positive du vecteur* **a** *doit décrire, dans le sens de rotation fixé, pour coïncider avec la direction positive du vecteur* **b**. Comme les directions positives des vecteurs sont marquées par les *pointes des flèches,* on peut aussi dire que *l'angle formé par les vecteurs* **a** *et* **b** *est celui que la pointe de la flèche de* **a** *doit décrire, dans le sens de rotation fixé, pour coïncider avec la pointe de la flèche de* **b**.

Je désignerai, dès lors, *l'angle formé par les vecteurs* **a** *et* **b** *par* (**a**, **b**).

Pour illustrer les notions que je viens d'établir, j'envisage le triangle ABC. La *fig.* 1 montre ce triangle et les vecteurs **a**, **b**, **c**, définis par les égalités (1), avec leurs flèches. En menant par le point O trois vecteurs, respectivement = **a**, **b**, **c**, on obtient le diagramme polaire (*fig.* 1 *bis*) du triangle ABC (*fig.* 1). Ce diagramme polaire met en évidence que la somme des angles (**b**, **c**), (**c**, **a**), (**a**, **b**) est égale à 2π ou à quatre angles droits. De plus ce diagramme polaire met en évidence que

$$(2)\qquad \begin{cases} (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pi - \alpha, \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \pi - \beta, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi - \gamma, \end{cases}$$

où α, β, γ sont les angles intérieurs du triangle ABC, dont la somme est égale à π.

2. *Définition des produits extérieur et intérieur de deux vecteurs* **a**, **b**.

Si l'on désigne par a, b *les longueurs des vecteurs* **a**, **b** :

1° *Le produit extérieur des vecteurs* **a**, **b**, *représenté par* [**ab**], *est défini par l'égalité*

$$[\mathbf{ab}] = \mathrm{ab}\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

2° *Le produit intérieur des vecteurs* **a**, **b**, *repré-*

senté par $[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}]$, *est défini par l'égalité*

$$[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}] = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Si le vecteur $\mathbf{b}$ est parallèle au vecteur $\mathbf{a}$, et tout particulièrement si $\mathbf{b}$ coïncide avec $\mathbf{a}$, on a $\mathbf{b} = \mathbf{a}$; $b = a$; $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$; $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = +1$.

Par conséquent, on tire des définitions 1° et 2°,

$$(3) \qquad \begin{cases} [\mathbf{a}\ \mathbf{a}] = 0, \\ [\mathbf{a} \mid \mathbf{a}] = a^2. \end{cases}$$

En désignant, de plus, par l'exposant $\frac{1}{2}$ la racine carrée, prise avec le signe positif, on obtient

$$(4) \qquad a = [\mathbf{a} \mid \mathbf{a}]^{\frac{1}{2}}$$

et l'on voit *que la longueur* a *d'un vecteur* $\mathbf{a}$ *est déterminée par la racine carrée, prise avec le signe positif, du produit intérieur* $[\mathbf{a} \mid \mathbf{a}]$.

Comme d'après la définition de l'angle $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, l'angle $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ est égal à $2\pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, des définitions 1° et 2° dérivent encore les formules

$$(5) \qquad \begin{cases} [\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}\ \mathbf{a}], \\ [\mathbf{a} \mid \mathbf{b}] = [\mathbf{b} \mid \mathbf{a}], \end{cases}$$

d'où résultent les théorèmes :

I. *Si l'on change dans un produit extérieur de deux vecteurs l'ordre des vecteurs, le produit extérieur change de signe.*

II. *Si l'on change dans un produit intérieur de deux vecteurs l'ordre des vecteurs, le produit intérieur reste invariable.*

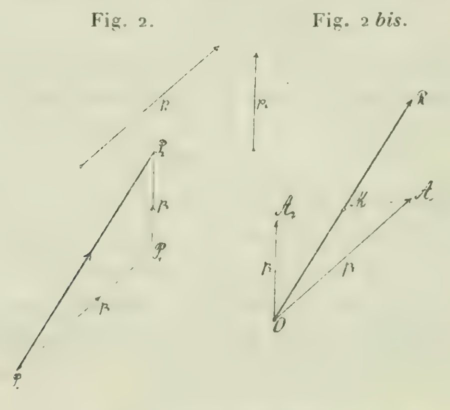
Comme les expressions $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a} \mid \mathbf{b}]$ sont appelées *produits* extérieur et intérieur, j'appelle encore les algorithmes qui lient $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$ *multiplications* extérieure

et intérieure et je dis que dans les produits $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a}|\mathbf{b}]$ les deux vecteurs sont *multipliés*, l'un par l'autre, *extérieurement* et *intérieurement*.

3. *Somme et différence de deux vecteurs. Somme algébrique de vecteurs quelconques. Théorèmes.*

Soient $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ deux vecteurs quelconques. Comme

Fig. 2. Fig. 2 *bis*.



$$P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2(M - O) = R - O.$$

les vecteurs peuvent être transportés, parallèlement à eux-mêmes, on peut les porter bout à bout (*fig.* 2) et poser

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = P_1 - P_0, \\ \mathbf{p}_2 = P_2 - P_1, \end{cases}$$

d'où suit

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = P_2 - P_0.$$

Comme le vecteur $-\mathbf{p}_2$ (*fig.* 3) représente le vecteur parallèle à $\mathbf{p}_2$, de même longueur que $\mathbf{p}_2$, mais de sens opposé, on a :

III. *Pour construire la somme (différence) de deux*

vecteurs quelconques $\mathbf{p}_1$ *et* $\mathbf{p}_2$, *on mène par un point quelconque* P_0 *le vecteur* $P_1 - P_0$, *égal à* $\mathbf{p}_1$, *et par le point* P_1 *le vecteur* $P_2 - P_1$, *égal à* $\mathbf{p}_2$ (*à* $-\mathbf{p}_2$); *le*

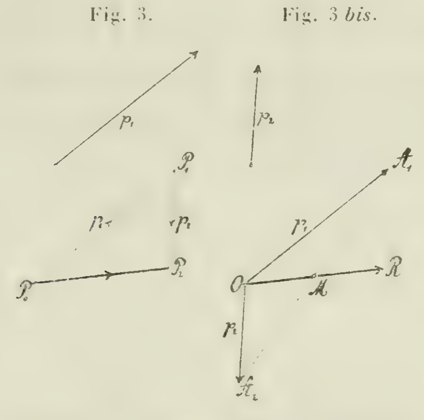


Fig. 3. Fig. 3 *bis*.

$P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = 2(M - O) = R - O.$

vecteur $P_2 - P_0$ *représentera la somme* (*différence*) *des deux vecteurs* $\mathbf{p}_1$ *et* $\mathbf{p}_2$.

Plus généralement soient $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ n vecteurs quelconques; leur somme algébrique

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1),$$

devient, si l'on pose :

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \varepsilon_1 (P_1 - P_0), \\ \mathbf{p}_2 = \varepsilon_2 (P_2 - P_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{p}_n = \varepsilon_n (P_n - P_{n-1}), \end{cases}$$

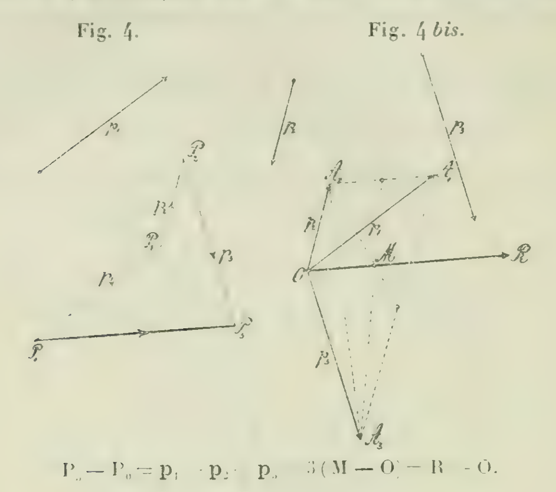
égale à $P_n - P_0$. Donc

IV. *Pour construire la somme algébrique*

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1),$$

des vecteurs quelconques $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *on mène par un point quelconque* P_0 *le vecteur* $P_1 - P_0 = \varepsilon_1 \mathbf{p}_1$,

Fig. 4. Fig. 4 *bis.*



$P_3 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 3(M - O) = R - O.$

c'est-à-dire parallèle à $\mathbf{p}_1$, *de même longueur que* $\mathbf{p}_1$ *et de même sens ou de sens opposé, suivant que* ε_1 *est positif ou négatif; par le point* P_1 *on mène le vecteur* $P_2 - P_1 = \varepsilon_2 \mathbf{p}_2$, *etc. En continuant cette construction jusqu'au dernier vecteur* $P_n - P_{n-1} = \varepsilon_n \mathbf{p}_n$, *le vecteur* $P_n - P_0$ *représentera la somme algébrique* $\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n$.

Si le point P_n coïncide avec le point P_0, la différence $P_n - P_0$ est égale à 0; dans ce cas le polygone $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se ferme. Donc

V. *La formule*

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n = 0$$

exprime que les vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ *peuvent former un polygone fermé.*

Dans le cas où $n = 3$, ce théorème est représenté par

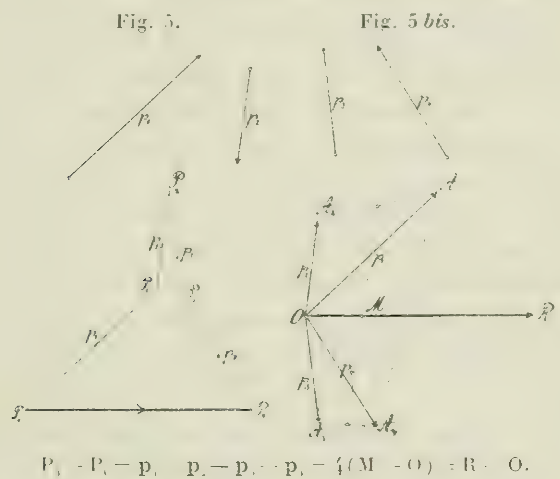
la formule

$$(7) \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0,$$

qui résulte des formules (1) et exprime que l'on peut former un triangle avec les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Donc

V$_1$. *Si trois vecteurs* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *sont liés par la relation* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, *on peut en former un triangle.*

Fig. 5. Fig. 5 *bis*.



$P_4 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = 4(M - O) = R - O.$

Les *fig.* 2, 3, 4, 5, 6 montrent, dans le cas de deux, trois, quatre ou cinq vecteurs, la construction de la somme algébrique, établie en IV.

On a, dans la *fig.* 2, $P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$; dans la *fig.* 3, $P_2 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$; dans la *fig.* 4, $P_3 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$; dans la *fig.* 5, $P_4 - P_0 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$; dans la *fig.* 6, $P_5 - P_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5$.

A la construction polygonale IV qui est connue correspond la *construction polaire* de la somme algébrique

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

que je crois nouvelle.

En effet, au lieu de porter les vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ bout à bout, on peut prendre un point quelconque O comme origine commune. Alors on peut poser

$$(6\,bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{p}_1 = \varepsilon_1(\mathrm{A}_1 - \mathrm{O}), \\ \mathbf{p}_2 = \varepsilon_2(\mathrm{A}_2 - \mathrm{O}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{p}_n = \varepsilon_n(\mathrm{A}_n - \mathrm{O}). \end{array}\right.$$

En formant l'expression $\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n$ on obtient

$$\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n = n(\mathrm{M} - \mathrm{O}),$$

où le point M, défini par

$$n\mathrm{M} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

est le *point moyen* des points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ dont la construction dérive immédiatement des définitions 1° et 2° du premier article (voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, 1898, théorèmes II, p. 394, et XIII, p. 404). Donc

IV *bis*. *Pour construire la somme algébrique*

$$\varepsilon_1\mathbf{p}_1 + \varepsilon_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{p}_n \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

des vecteurs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *on mène par un pôle quelconque* O *les vecteurs*

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{O} = \varepsilon_1\mathbf{p}_1, \qquad \mathrm{A}_2 - \mathrm{O} = \varepsilon_2\mathbf{p}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}_n - \mathrm{O} = \varepsilon_n\mathbf{p}_n,$$

c'est-à-dire parallèles respectivement à $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, *de même longueur que* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ *et de même sens ou de sens opposé, suivant que* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *sont positifs ou négatifs. On construit alors le point moyen* M *des points* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, *défini par*

$$n\mathrm{M} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n;$$

le vecteur M — O, *pris* n *fois, représentera la somme*

algébrique

$$\varepsilon_1 \mathbf{p}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \varepsilon_n \mathbf{p}_n = n(M - O) = R - O.$$

Dans les figures polaires 2 *bis*, 3 *bis*, 4 *bis*, 5 *bis*, 6 *bis* le point moyen M est construit pour $n = 2, 3, 4, 5$. Le point M est : pour $n = 2$, le milieu du segment A_1A_2 (*fig.* 2 *bis* et *fig.* 3 *bis*); pour $n = 3$, le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$ (*fig.* 4 *bis*); pour $n = 4$, le milieu du segment qui joint les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ (*fig.* 5 *bis*); pour $n = 5$, le point d'intersection des droites A_iM_i, M_i étant le point moyen du quadrilatère $A_kA_lA_mA_n$; $i, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5$ (*fig.* 6 *bis*). Pour un n quelconque, le point moyen est le point d'intersection des droites A_iM_i, M_i étant le point moyen du polygone $A_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le vecteur $R - O$, dans les *fig.* 2 *bis* et 3 *bis*; 4 *bis*; 5 *bis*; 6 *bis* égal respectivement à $2(M - O)$; $3(M - O)$; $4(M - O)$; $5(M - O)$ représente $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ (*fig.* 2 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, (*fig.* 3 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ (*fig.* 4 *bis*); $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$ (*fig.* 5 *bis*); $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5$ (*fig.* 6 *bis*), et l'on voit que ce vecteur $R - O$ est parallèle et égal au vecteur correspondant $P_2 - P_0$; $P_3 - P_0$; $P_4 - P_0$; $P_5 - P_0$ des figures polygonales 2 et 3, 4, 5, 6 et qu'il a le même sens.

4. *Théorème fondamental, relatif à trois vecteurs quelconques.* — D'après le théorème V_1, entre trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ formant un triangle existe la relation $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

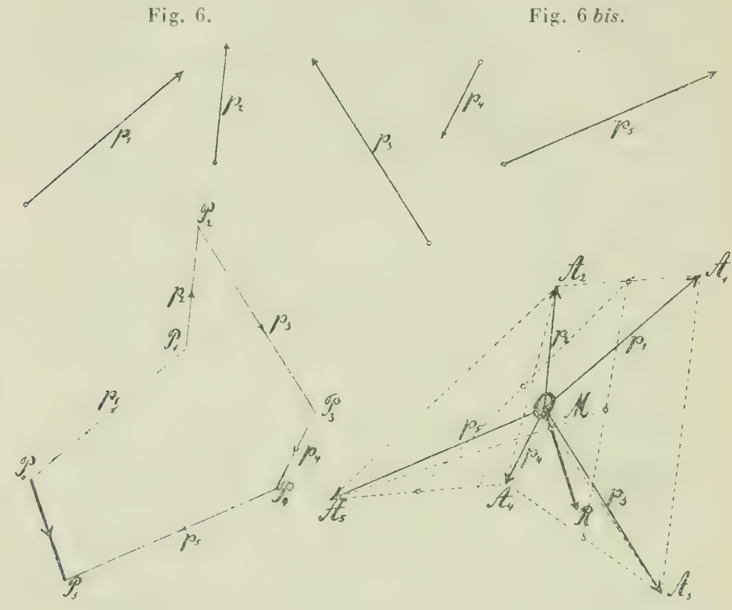
VI. *Entre trois vecteurs quelconques* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$,

existe toujours une relation linéaire de la forme

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = 0,$$

α_1, α_2, α_3 étant des coefficients positifs ou négatifs.

Fig. 6. Fig. 6 *bis*.



$\mathrm{P}_5 - \mathrm{P}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \quad \mathbf{p}_5 = 5(\mathrm{M} - \mathrm{O}) = \mathrm{R} - \mathrm{O}.$

Pour démontrer ce théorème, je fais remarquer que les vecteurs $\alpha_1 \mathbf{a}_1$, $\alpha_2 \mathbf{a}_2$, $\alpha_3 \mathbf{a}_3$ pourront toujours être transportés parallèlement à eux-mêmes, de façon à former un triangle $A_1 A_2 A_3$. Comme les vecteurs $A_3 - A_2$, $A_1 - A_3$, $A_2 - A_1$ sont parallèles respectivement à $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, on aura

$$\begin{cases} A_3 - A_2 = \alpha_1 \mathbf{a}_1, \\ A_1 - A_3 = \alpha_2 \mathbf{a}_2, \\ A_2 - A_1 = \alpha_3 \mathbf{a}_3. \end{cases}$$

Suivant que $A_3 - A_2$, $A_1 - A_3$, $A_2 - A_1$ sont de même

sens que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ou de sens opposé, les coefficients α_1, α_2, α_3 seront positifs ou négatifs et, quant à leurs valeurs numériques, ces coefficients représentent les rapports $A_2A_3 : a_1$, $A_3A_1 : a_2$, $A_1A_2 : a_3$; a_1, a_2, a_3 étant les longueurs des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. En ajoutant les formules précédentes, le théorème VI est démontré.

On peut aussi donner à ce théorème l'énoncé suivant :

VII. *Chaque vecteur s'exprime d'une façon linéaire par deux vecteurs quelconques.*

5. *Conséquences du théorème VI.* — De la relation linéaire

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$$

qui existe entre trois vecteurs quelconques, on peut déduire des conséquences aussi importantes que simples.

En effet, si l'on multiplie la relation

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$$

extérieurement par $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] - \alpha_3[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] = 0, \\ \alpha_3[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] - \alpha_1[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0, \\ \alpha_1[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] - \alpha_2[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0, \end{array}\right.$$

d'où suit

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = [\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] : [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] : [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2].$$

Par conséquent, on a identiquement

(8) $$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_1 + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1]\mathbf{a}_2 + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3 = 0.$$

Par multiplication extérieure et intérieure, on en tire, $\mathbf{a}_4$ étant un vecteur quelconque,

(9) $$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1][\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2][\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4] = 0.$$

(10) $$[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1][\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_4] + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2][\mathbf{a}_3|\mathbf{a}_4] = 0.$$

De même, si l'on multiplie intérieurement la relation

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0.$$

on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1[a_1|a_1] + \alpha_2[a_2|a_1] + \alpha_3[a_3|a_1] &= 0, \\ \alpha_1[a_1|a_2] + \alpha_2[a_2|a_2] + \alpha_3[a_3|a_2] &= 0, \\ \alpha_1[a_1|a_3] + \alpha_2[a_2|a_3] + \alpha_3[a_3|a_3] &= 0; \end{aligned}\right.$$

d'où suit

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} [a_1|a_1] & [a_2|a_1] & [a_3|a_1] \\ [a_1|a_2] & [a_2|a_2] & [a_3|a_2] \\ [a_1|a_3] & [a_2|a_3] & [a_3|a_3] \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} & a_1^2 a_2^2 a_3^2 - a_1^2[a_2|a_3]^2 - a_2^2[a_3|a_1]^2 \\ & \qquad - a_3^2[a_1|a_2]^2 + 2[a_2|a_3][a_3|a_1][a_1|a_2] = 0. \end{aligned}\right.$$

6. *Expression d'un vecteur au moyen des deux vecteurs unitaires* $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$. *Nouvelles expressions des produits extérieur et intérieur de deux vecteurs.* — Soient (*fig.* 7) A un point de coordonnées a_1 et a_2 par

Fig. 7.

rapport à deux axes rectangulaires d'origine E; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ deux vecteurs de longueur égale à l'unité positive et dont les directions positives sont parallèles aux directions positives des axes. J'appelle ces vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *vecteurs unitaires.*

Alors on a

$$A - E = (A_1 - E) + (A - A_1).$$

Comme

$$\begin{cases} A_1 - E = a_1 \mathbf{e}_1, \\ A - A_1 = a_2 \mathbf{e}_2, \end{cases}$$

on obtient, en posant $A - E = \mathbf{a}$,

(13) $$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2.$$

Donc

VIII. *Le vecteur* $\mathbf{a}$, *dont les projections sur deux axes rectangulaires sont* a_1 *et* a_2, *s'exprime par l'égalité*

(13) $$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2,$$

où $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$ *sont les deux vecteurs unitaires.*

D'après ces définitions et les définitions générales du n° 2, les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sont soumis aux conditions

(14) $$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1] = 0, \quad [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2] = 0, \quad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = 1;$$

(15) $$[\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1] = 1, \quad [\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2] = 1, \quad [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2] = 0.$$

Soit un autre vecteur

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2.$$

Si l'on multiplie les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ en tenant compte des conditions (14) ou (15), on obtient deux expressions différentes, savoir

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{et} \quad a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Je vais démontrer que ces expressions sont précisément égales à $[\mathbf{ab}]$ et $[\mathbf{a} | \mathbf{b}]$, de façon que l'on a

(16) $$[\mathbf{ab}] = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

(17) $$[\mathbf{a} | \mathbf{b}] = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

En effet, d'après la *fig.* 8, on a

(18) $$\begin{cases} a_1 = a \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}), & b_1 = b \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}), \\ a_2 = a \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}), & b_2 = b \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}). \end{cases}$$

d'où il suit

$$\begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = ab \sin\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) - (\mathbf{e}_1, \mathbf{a})\} = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{ab}], \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) - (\mathbf{e}_1, \mathbf{a})\} = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}|\mathbf{b}]. \end{cases}$$

Il est bon de remarquer que l'on n'a pas besoin de figure pour établir les égalités (18). Ces égalités se déduisent immédiatement si l'on multiplie extérieurement et intérieurement par $\mathbf{e}_1$ les expressions

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2. \end{cases}$$

De cette manière, on obtiendrait par exemple

$$[\mathbf{e}_1|\mathbf{a}] = a_1[\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1] + a_2[\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2]$$

ou

$$a \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}) = a_1,$$

et de même les autres relations (18) (¹).

Remarque. — Entre les expressions des vecteurs et des points il y a une liaison étroite. Si l'on donne à l'expression (13) du vecteur $\mathbf{a}$

$$A - E = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$$

la forme

$$A = E + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \tag{19}$$

on a

IX. *Le point* A, *dont* a_1, a_2 *sont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires, s'exprime par*

(¹) Les identités qui se présentent parfois dans les problèmes les plus élémentaires de la Géométrie prennent souvent une importance considérable dans les problèmes élevés de l'Analyse. Ainsi les identités obtenues par la substitution des formules (16) et (17) dans les identités (9) et (10) m'ont permis d'établir des relations importantes pour la théorie des fonctions thêta. (Voir *Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 493, et *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XCVI, p. 182 et 324; t. XCVII, p. 165).

l'égalité

(19) $$\mathrm{A} = \mathrm{E} + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2,$$

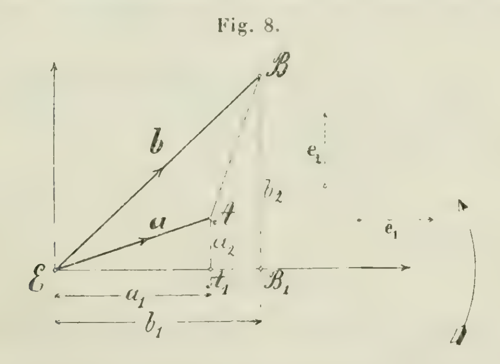
où E *est un point quelconque* et $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *sont les deux vecteurs unitaires dont les directions positives sont parallèles aux directions positives des axes.*

Dans l'article suivant, je ferai usage de cette expression grassmannienne du point A.

7. *Complément d'un vecteur.* — Pour réunir dans cet article toutes les notions nécessaires aux applications des vecteurs, je vais encore définir le complément d'un vecteur. Soit **m** un vecteur quelconque; si l'on fait tourner le vecteur **m** d'un angle droit *dans le sens de rotation fixé,* le vecteur ainsi obtenu est le *complément du vecteur* **m**. Je le désigne par un *trait vertical,* placé devant le caractère **m**, c'est-à-dire par $|\mathbf{m}$. Donc

X. *Le complément du vecteur* **m**, *désigné par* $|\mathbf{m}$,

Fig. 8.



est le vecteur que l'on obtient en faisant tourner le vecteur **m** *d'un angle droit dans le sens de rotation fixé.*

De cette définition l'on déduit immédiatement que le

vecteur $|\mathbf{m}$ a le même sens que $\mathbf{m}$ et la même longueur, mais que l'angle $(\mathbf{m}, |\mathbf{m})$ est égal à $+\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on forme le complément du vecteur $|\mathbf{m}$, c'est-à-dire si l'on fait tourner d'un angle droit le vecteur $|\mathbf{m}$, on obtient le vecteur $-\mathbf{m}$. Donc

XI. *Le complément du complément de* $\mathbf{m}$ *est égal à* $-\mathbf{m}$, *ou en formule*

$$||\mathbf{m} = -\mathbf{m}.$$

En appliquant ces définitions aux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, on a les égalités

$$(20) \qquad \begin{cases} |\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \\ |\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \end{cases}$$

qui changent les formules (14) et (15) les unes en les autres.

Plus généralement, le produit intérieur peut se déduire du produit extérieur : c'est le produit extérieur d'un vecteur quelconque par le complément d'un autre vecteur.

En effet, le produit extérieur, formé par $\mathbf{a}$ et $|\mathbf{b}$, c'est-à-dire $[\mathbf{a}(|\mathbf{b})]$ est égal à $ab\sin(\mathbf{a}, |\mathbf{b})$. Or, l'angle $(\mathbf{a}, |\mathbf{b})$ est égal à $\frac{1}{2}\pi - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$; donc

$$\sin(\mathbf{a}, |\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

et, par conséquent,

$$[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = [\mathbf{a}(|\mathbf{b})].$$

De même, du produit intérieur peut se déduire le produit extérieur.

On voit par là que le trait vertical qui apparaît dans le produit intérieur et celui qui représente le complément sont identiques. Dans certaines applications, cette identité possède une importance considérable.

8. *Applications.* — Les notions que je viens d'exposer suffisent pour toute application des vecteurs. Pour en donner quelques exemples, je vais en déduire les éléments de la Trigonométrie, ainsi que quelques théorèmes géométriques.

α. *Éléments de la Trigonométrie.* — Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ trois vecteurs formant un triangle et liés, conséquemment, par l'égalité

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0. \tag{7}$$

En multipliant cette relation extérieurement par $\mathbf{a}$, on a

$$[\mathbf{aa}] + [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}] = 0.$$

Comme

$$[\mathbf{aa}] = 0 \qquad \text{et} \qquad [\mathbf{ac}] = -[\mathbf{ca}],$$

on obtient

$$[\mathbf{ab}] = [\mathbf{ca}] \tag{21}$$

ou

$$ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ca \sin(\mathbf{c}, \mathbf{a}),$$

ou

$$b \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c \sin(\mathbf{c}, \mathbf{a}). \tag{21$_1$}$$

ou, d'après les formules (2),

$$b \sin\gamma = c \sin\beta. \tag{21$_2$}$$

En multipliant la formule (7) intérieurement par $\mathbf{a}$, on a

$$[\mathbf{a}.\mathbf{a}] + [\mathbf{a}.\mathbf{b}] + [\mathbf{a}.\mathbf{c}] = 0. \tag{22}$$

ou

$$a^2 + ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + ac\cos(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0,$$

ou

$$a + b\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + c\cos(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0. \tag{22$_1$}$$

ou, en vertu des formules (2)

$$a - b\cos\gamma - c\cos\beta = 0 \tag{22$_2$}$$

Enfin, si l'on donne à la relation (7) la forme

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$$

et que l'on forme le produit intérieur des deux membres, on obtient

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b})|(\mathbf{a} + \mathbf{b})] = [\mathbf{c}|\mathbf{c}],$$

ou

$$(23) \qquad [\mathbf{a}|\mathbf{a}] + [\mathbf{b}|\mathbf{b}] - 2[\mathbf{a}|\mathbf{b}] = [\mathbf{c}|\mathbf{c}],$$

ou

$$(23_1) \qquad a^2 + b^2 + 2ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c^2,$$

ou

$$(23_2) \qquad a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2.$$

Par les formules précédentes sont établies les relations fondamentales de la Trigonométrie, hormis les relations

$$(25_2) \qquad \begin{cases} (b - c)\cos\frac{1}{2}\alpha = a\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma), \\ (b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha = a\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma). \end{cases}$$

Pour établir les formules grassmanniennes qui correspondent à ces relations, je fais usage, dans la démonstration, de la même figure que l'on emploie en Trigonométrie ordinaire.

Soit ABC (*fig.* 9) un triangle quelconque;

$$DA = AS = BC = c.$$

Comme les vecteurs $D - C$ et $S - C$ ont la même direction que le vecteur $\mathbf{b}$, on a

$$D - C = \delta\mathbf{b},$$
$$S - C = \sigma\mathbf{b},$$

δ et σ étant des coefficients. Or, de ces égalités résulte

$$CD = \delta b,$$
$$CS = \sigma b,$$

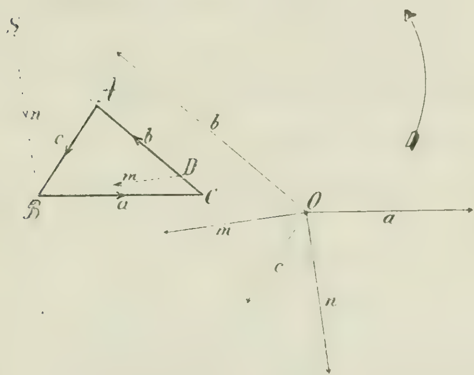
et comme $\mathrm{CD} = \mathrm{b} - \mathrm{c}$, $\mathrm{CS} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$, on a

$$\mathrm{b} - \mathrm{c} = \delta \mathrm{b},$$
$$\mathrm{b} + \mathrm{c} = \sigma \mathrm{b};$$

donc

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D} - \mathrm{C} &= \frac{\mathrm{b} - \mathrm{c}}{\mathrm{b}}\,\mathbf{b}, \\ \mathrm{S} - \mathrm{C} &= \frac{\mathrm{b} + \mathrm{c}}{\mathrm{b}}\,\mathbf{b}. \end{aligned}\right.$$

Fig. 9. Fig. 9 *bis*.



En substituant ces valeurs dans les identités

$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{B} - \mathrm{D}) + (\mathrm{D} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B}) &= 0, \\ (\mathrm{B} - \mathrm{S}) + (\mathrm{S} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B}) &= 0, \end{aligned}\right.$$

et en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B} - \mathrm{D} &= \mathbf{m}, \\ \mathrm{B} - \mathrm{S} &= \mathbf{n}, \end{aligned}\right.$$

on obtient

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{m} + \frac{\mathrm{b} - \mathrm{c}}{\mathrm{b}}\,\mathbf{b} + \mathbf{a} &= 0, \\ \mathbf{n} + \frac{\mathrm{b} + \mathrm{c}}{\mathrm{b}}\,\mathbf{b} + \mathbf{a} &= 0. \end{aligned}\right.$$

En multipliant extérieurement la première égalité

par **m** et la seconde par **n**, on trouve

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b-c}{b}[\mathbf{bm}] = [\mathbf{ma}],\\ &\frac{b+c}{b}[\mathbf{bn}] = [\mathbf{na}].\end{aligned}\right.$$

d'où suit

$$(25_1)\qquad \left\{\begin{aligned} &(b-c)\sin(\mathbf{b},\ \mathbf{m}) = a\sin(\mathbf{m},\ \mathbf{a}),\\ &(b+c)\sin(\mathbf{b},\ \mathbf{n}) = a\sin(\mathbf{n},\ \mathbf{a}).\end{aligned}\right.$$

Ces formules se transforment immédiatement en les formules (25_2), si de la *fig.* 9 *bis* représentant le diagramme polaire de la *fig.* 9 et des formules (2), l'on déduit les relations angulaires suivantes :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &1.\ (\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) && = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha,\\ &2.\ (\mathbf{b}, \mathbf{n}) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) && = \pi - \tfrac{1}{2}\alpha,\\ &3.\ (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = \pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\} && = \pi - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),\\ &4.\ (\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\} && = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma).\end{aligned}\right.$$

Si l'on ne veut pas recourir aux diagrammes polaires, le calcul grassmannien permet, dans tous les cas, d'établir directement les relations angulaires. Pour montrer, à titre d'exemple, la manière de procéder, je vais établir par ce calcul les relations (26).

Au moyen de la formule (7), les égalités (24) se changent en

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &b\mathbf{m} = b\mathbf{c} + c\mathbf{b},\\ &b\mathbf{n} = b\mathbf{c} - c\mathbf{b}.\end{aligned}\right.$$

En multipliant intérieurement la première égalité par **b** et par **c**, on a

$$b[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{b}|\mathbf{c}] + c[\mathbf{b}|\mathbf{b}],\qquad b[\mathbf{c}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{c}|\mathbf{c}] + c[\mathbf{b}|\mathbf{c}],$$

ou

$$[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = [\mathbf{b}|\mathbf{c}] + bc,\qquad b[\mathbf{c}|\mathbf{m}] = c\{bc + [\mathbf{b}|\mathbf{c}]\};$$

donc

$$c[\mathbf{b}|\mathbf{m}] = b[\mathbf{c}|\mathbf{m}].$$

ou

$$\cos(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \cos(\mathbf{c}, \mathbf{m}).$$

De même on tire, en multipliant extérieurement la première égalité (27) par $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$

$$[\mathbf{bm}] = [\mathbf{bc}], \qquad \mathrm{b}[\mathbf{mc}] = \mathrm{c}[\mathbf{bc}],$$

donc

$$\mathrm{c}[\mathbf{bm}] = \mathrm{b}[\mathbf{mc}],$$

ou

$$\sin(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \sin(\mathbf{m}, \mathbf{c}).$$

Comme

$$\sin(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \sin(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \cos(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = \cos(\mathbf{m}, \mathbf{c}),$$

on a

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}).$$

Or, on a l'identité angulaire

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) + (\mathbf{m}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c});$$

donc

$$(26_1) \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Si l'on multiplie intérieurement les deux égalités (27), on trouve

$$\mathrm{b}^2[\mathbf{m}|\mathbf{n}] = \mathrm{b}^2[\mathbf{c}|\mathbf{c}] - \mathrm{c}^2[\mathbf{b}|\mathbf{b}] = \mathrm{b}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{b}^2 = 0;$$

par conséquent les deux vecteurs $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ sont rectangulaires l'un à l'autre, et l'angle $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}\pi$ (voir *fig.* 9 et 9 *bis*).

Or, on a identiquement

$$(\mathbf{b}, \mathbf{m}) + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}, \mathbf{n});$$

donc

$$(26_2) \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{n}) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

De plus, on a identiquement

$$(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

ou, comme

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c})+(\mathbf{c}, \mathbf{a})+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2\pi,$$

(26₃) $$(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = \pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

Enfin, il résulte de l'identité angulaire

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n})+(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{a}),$$

ou

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = (\mathbf{m}, \mathbf{a}) - \tfrac{1}{2}\pi,$$

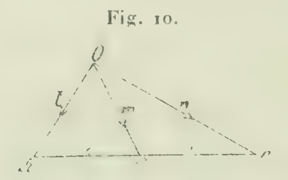
la dernière des relations (26), savoir

(26₄) $$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\{(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\}.$$

β. *Théorème de Stewart et sa généralisation.*

Soient (*fig.* 10) A, B, C trois points, situés sur une même droite; O un point quelconque. Si l'on désigne

Fig. 10.



les vecteurs A — O, B — O, C — O par **l**, **m**, **n** et les segments BC, CA, AB par a, b, c, où a + b + c = o, on a

$$\mathbf{m} - \mathbf{n} + (C - B) = 0.$$

Comme les points A, B, C sont situés sur la même droite, le vecteur C — B coïncide avec le vecteur A — C; par conséquent on a

$$(C - B) = \lambda (A - C),$$
$$BC = \lambda\, CA,$$
$$a = \lambda b$$

et

$$C - B = \frac{a}{b}(A - C) = \frac{a}{b}(\mathbf{l} - \mathbf{n});$$

donc

$$\mathbf{m} - \mathbf{n} + \frac{a}{b}(\mathbf{l} - \mathbf{n}) = 0,$$

ou

$$(28) \qquad a\mathbf{l} + b\mathbf{m} + c\mathbf{n} = 0.$$

Par multiplication intérieure résulte

$$(29) \qquad a^2[\mathbf{l} \mid \mathbf{l}] + b^2[\mathbf{m} \mid \mathbf{m}] + 2ab[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}] = c^2[\mathbf{n} \mid \mathbf{n}].$$

Or on a

$$(B - A) = \mathbf{m} - \mathbf{l};$$

donc

$$c^2 = m^2 + l^2 - 2[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}].$$

Par conséquent l'équation (29) prend la forme

$$(30) \qquad a^2 l^2 + b^2 m^2 + ab(m^2 + l^2 - c^2) = c^2 n^2,$$

ou

$$a(a + b)l^2 + b(a + b)m^2 - abc^2 = c^2 n^2.$$

En divisant par $a + b = -c$ résulte la relation

$$al^2 + bm^2 + cn^2 + abc = 0,$$

d'où suit (¹) :

XII₁. Théorème de Stewart. — *Si l'on joint un point quelconque* O *aux trois points* A, B, C *situés sur une même droite, les segments* AO, BO, CO; BC, CA, AB *sont liés par la relation*

$$BC.OA^2 + CA.OB^2 + AB.OC^2 + BC.CA.AB = 0.$$

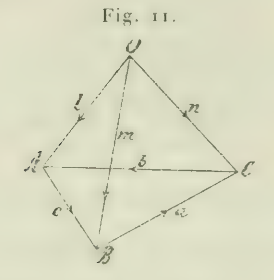
Généralisons le théorème : Soient (*fig.* 11) A, B, C trois points absolument quelconques; **l**, **m**, **n** les vecteurs A — O, B — O, C — O; l, m, n leurs longueurs.

(¹) *Voir* M. Chasles, *Aperçu historique*, Chap. IV, § 28, 2ᵉ édit., p. 175. Paris; 1875.

D'après la formule (12), on a

$$l^2 m^2 n^2 - l^2[\mathbf{m} \mid \mathbf{n}]^2 - m^2[\mathbf{n} \mid \mathbf{l}]^2 - n^2[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}]^2 + 2[\mathbf{m} \mid \mathbf{n}][\mathbf{n} \mid \mathbf{l}][\mathbf{l} \mid \mathbf{m}] = 0.$$

Fig. 11.



Or

$$2[\mathbf{m} \mid \mathbf{n}] = m^2 + n^2 - a^2,$$
$$2[\mathbf{n} \mid \mathbf{l}] = n^2 + l^2 - b^2,$$
$$2[\mathbf{l} \mid \mathbf{m}] = l^2 + m^2 - c^2;$$

donc

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &4 l^2 m^2 n^2 - l^2(m^2 + n^2 - a^2)^2 - m^2(n^2 + l^2 - b^2)^2 \\ &\quad - n^2(l^2 + m^2 - c^2)^2 \\ &\quad + (m^2 + n^2 - a^2)(n^2 + l^2 - b^2)(l^2 + m^2 - c^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où résulte [1] :

XII$_2$. Théorème de Stewart généralisé. — *Entre les six segments qui relient quatre points* A, B, C, O *absolument quelconques, existe toujours la relation suivante :*

$$\begin{aligned} &4\,OA^2.OB^2.OC^2 - OA^2(OB^2 + OC^2 - BC^2)^2 \\ &\quad - OB^2(OC^2 + OA^2 - CA^2)^2 - OC^2(OA^2 + OB^2 - AB^2)^2 \\ &\quad + (OB^2 + OC^2 - BC^2)(OC^2 + OA^2 - CA^2)(OA^2 + OB^2 - AB^2) = 0. \end{aligned}$$

En développant la relation (31), on arrive aux deux formes suivantes dont la première a été donnée dernière-

---

[1] *Voir* L.-N.-M. Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*; p. 6 et 7; 1806. Paris.

ment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (t. IV, p. 26 et aussi p. 163) :

$$(31_1)\quad \left\{\begin{aligned} &(a^2l^2 + m^2n^2)(b^2 + c^2 - a^2)\\ &\quad + (b^2m^2 + n^2l^2)(c^2 + a^2 - b^2)\\ &\quad + (c^2n^2 + l^2m^2)(a^2 + b^2 - c^2)\\ &= a^2l^4 + b^2m^4 + c^2n^4 + a^2b^2c^2 \end{aligned}\right.$$

et

$$(31_2)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2l^2(m^2 + n^2 - l^2 + b^2 + c^2 - a^2)\\ &\quad + b^2m^2(n^2 + l^2 - m^2 + c^2 + a^2 - b^2)\\ &\quad + c^2n^2(l^2 + m^2 - n^2 + a^2 + b^2 - c^2)\\ &= a^2b^2c^2 + m^2n^2a^2 - n^2l^2b^2 + l^2m^2c^2. \end{aligned}\right.$$

Les applications que je viens de donner ont pour but de familiariser le lecteur avec l'usage des vecteurs et de lui montrer comment certains problèmes peuvent être, grâce à eux, résolus avec une remarquable facilité.

Il me reste, dans un nouvel article, à introduire la *droite* et à y ajouter des applications de l'ensemble des éléments du plan.

[C2e]

SUR QUELQUES INTÉGRALES;

PAR M. le Professeur GENESE,
De l'Université du Pays de Galles.

Dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, édition de 1873, p. 260, l'auteur dit :

« En posant

$$u = x\sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x\cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \frac{v}{u}, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{bx^2\,dx}{(au + bv)^2} = \frac{u}{au + bv}.$$

Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\,dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tang}x]^2} = \frac{\operatorname{tang}x}{a+(ax+b)\operatorname{tang}x},$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation. »

Voici comment on peut combler la lacune :

En posant $\theta = x - \operatorname{arc\,tang} x$, on a

$$d\theta = \frac{x^2\,dx}{1+x^2}, \qquad \cos\theta = \cos x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sin x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

alors

$$\operatorname{séc}^2\theta\,d\theta = \frac{x^2\,dx}{(\cos x + x\sin x)^2};$$

et la première intégrale égale

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}x - x}{1+x\operatorname{tang}x} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}.$$

En outre

$$\sin\theta = \sin x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

et la seconde intégrale est

$$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -\cot\theta.$$

La troisième se change en

$$\int \frac{b\,d\theta}{(a\cos\theta+b\sin\theta)^2} = \int \frac{b\,d\operatorname{tang}\theta}{(a+b\operatorname{tang}\theta)^2} = -\frac{1}{a+b\operatorname{tang}\theta}, \ldots.$$

La quatrième ne présente absolument pas de difficulté.

L'intégrale est

$$\int \frac{a\cot^2 x\,dx}{(a\cot x + ax + b)^2} = \int \frac{-a\,d(\cot x + x)}{(a\cot x + ax + b)^2}$$
$$= \frac{1}{a\cot x + ax + b}.$$

[M¹5a]

POINT REMARQUABLE DANS LE PLAN D'UNE CUBIQUE;

Par M. STUYVAERT,
Professeur à l'Athénée royal de Gand.

I.

1. Soit O un point dans le plan d'une cubique Γ; une droite quelconque passant par O rencontre la courbe aux points A, B, C et la conique polaire de O aux points R_1 et R_2. En vertu du théorème de Côtes généralisé, on a, moyennant une démonstration que nous avons exposée ailleurs ([1]),

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{3}{OR_1.OR_2} = \dfrac{1}{OA.OB} + \dfrac{1}{OB.OC} + \dfrac{1}{OC.OA} \\ \qquad\qquad = \dfrac{OA - OB + OC}{OA.OB.OC}. \end{cases}$$

Si le point O, non situé sur la courbe, a pour conique polaire un cercle, le premier membre de l'équation est constant; donc *sur tout rayon passant par O, le produit des segments déterminés par la cubique est à la somme algébrique de ces mêmes segments dans un rapport constant.*

Dans les mêmes conditions, *si le point O est sur la courbe, son conjugué harmonique sur un rayon quelconque relativement aux deux autres intersections de ce rayon avec la cubique est la projection orthogonale d'un point fixe sur ce rayon.*

([1]) Voir *Mathesis*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 20; 1898; la proposition dont il s'agit s'y trouve démontrée pour une polaire de degré quelconque d'une courbe d'ordre n.

Ce point fixe est diamétralement opposé à O sur le cercle polaire; il est donc sur la normale en O à la cubique, à une distance quadruple du rayon de courbure de Γ. Cela résulte du théorème connu : *la courbure en un point d'une cubique est double de la courbure, au même point, de sa conique polaire* (¹).

2. Réciproquement, si un point O, non situé sur la cubique Γ, jouit de la propriété précitée, sa conique polaire est telle que la puissance d'un point relativement à cette conique est constante : c'est donc un cercle.

Si le point O est sur la courbe, la réciproque de la propriété ci-dessus est évidente.

La relation segmentaire (1) étant susceptible de généralisation pour des courbes d'ordre n, et leurs polaires de degré quelconque, on peut facilement étendre le théorème du n° 1. Remarquons toutefois qu'il n'existe pas de cubique telle que la puissance d'un point relativement à la courbe soit constante, tandis qu'il existe des quadriques qui jouissent de cette propriété, à savoir celles qui ont un double contact avec la droite de l'infini, aux points cycliques; la démonstration est aisée (²).

3. Il y a toujours, dans le plan d'une cubique, au moins un point dont la conique polaire est un cercle, savoir le point commun aux droites polaires des deux points cycliques; en général, ces deux droites sont imaginaires conjuguées et ont alors un seul point commun réel.

(¹) Ce théorème a été démontré, pour une courbe quelconque, par M. Moutard (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860), par MM. Servais, Demoulin et par nous dans les *Recueils de l'Académie royale de Belgique*.

(²) Ruffini, *Memoria della R. Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna*, 4ᵉ série, t. X; 5ᵉ série, t. I, II.

Si la cubique Γ est circulaire, le point en question est un foyer.

Soit $f = 0$ l'équation de Γ, les coordonnées x_1, x_2 étant rectangulaires et rendues homogènes par l'introduction de la troisième variable $x_3 = 1$.

La conique polaire du point O (y_1, y_2, y_3) est représentée par

$$(2) \qquad \left(x_1 \frac{d}{dy_1} + x_2 \frac{d}{dy_2} + x_3 \frac{d}{dy_3}\right)^2 f = 0.$$

Cette conique est un cercle, si l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dy_1^2} - \dfrac{d^2 f}{dy_2^2} = 0, \\ \dfrac{d^2 f}{dy_1\, dy_2} = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) représentent deux droites passant par O; en les additionnant et les soustrayant membre à membre, après avoir multiplié par $2\sqrt{-1}$ les termes de la seconde, on obtient les droites polaires des deux points cycliques.

4. Pour certaines cubiques spéciales, les droites représentées par les équations (3) peuvent coïncider, ou l'une de ces deux équations peut être identique. Analytiquement, ces deux hypothèses s'expriment par la relation

$$(4) \qquad k \frac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} = \left(\frac{d^2 f}{dx_1^2} - \frac{d^2 f}{dx_2^2}\right);$$

k est un paramètre arbitraire, dont les valeurs zéro et ∞ correspondent au cas où l'une des équations (3) est identique.

Quand la condition (4) est vérifiée, et dans ce cas seulement, les deux points cycliques ont une même

droite polaire réelle, dont tous les points jouissent de la propriété énoncée au n° 1 ; leurs coniques polaires sont des cercles formant un faisceau, et possédant donc encore deux points communs à distance finie ; si la cubique est singulière, le point double est un de ces deux points.

La condition (4) caractérise une classe de cubiques, dont nous exposons quelques propriétés dans le paragraphe III.

5. Les équations (3) peuvent être identiques toutes deux ; l'équation de la cubique Γ se réduit alors à

$$(x_1^2 + x_2^2)x_3 + (ax_1 + bx_2)x_3^2 + cx_3^3 = 0;$$

elle représente un cercle et la droite de l'infini ; ce cas particulier est donc sans importance.

6. Dans la *parabole semi-cubique*,

$$px_2^2 x_3 = x_1^3,$$

tous les points de la droite

$$6x_1 + 2px_3 = 0$$

ont pour conique polaire un cercle.

Dans la *parabole cubique*,

$$p^2 x_2 x_3^2 = x_1^3,$$

ce sont les points de l'axe des x_2.

Dans la *cissoïde*,

$$(2rx_3 - x_1)x_2^2 = x_1^3,$$

il n'y a qu'un point jouissant de la propriété en question ; il est sur l'axe des x_1 et a pour abscisse $-\frac{2r}{3}\cdot$

Dans la *strophoïde* aussi, le point est unique et, en

outre, situé sur la courbe; il est à la fois sommet et foyer; sa conique polaire est le cercle ayant pour diamètre la distance du sommet au nœud.

7. Quand la cubique se réduit aux trois côtés d'un triangle ABC, il existe un seul point, le *point de Lemoine*, dont la conique polaire est un cercle; celui-ci est circonscrit au triangle ABC.

Donc, *si, par le point de Lemoine* K *d'un triangle* ABC, *on mène une sécante variable rencontrant les côtés en des points* M, N, P, *le produit des segments* KM, KN, KP *est à leur somme algébrique dans un rapport constant.*

Ce rapport est la puissance du point de Lemoine relativement au cercle de Lemoine.

Car, pour l'évaluer, menons la sécante parallèle à BC et rencontrant les côtés du triangle AB, AC, BC, respectivement en R, en S, et à l'infini; le rapport considéré est le rectangle KR.KS.

Remarquons en passant que si l'on mène, par K, des parallèles aux trois côtés du triangle, le raisonnement des nos 1 et 2 conduit rapidement à la propriété fondamentale du cercle de Lemoine.

II.

8. Lorsque le point O, ayant pour conique polaire un cercle est unique, il jouit de quelques propriétés, que nous allons établir.

Les énoncés nous ont été communiqués par M. Servais, professeur à l'Université de Gand.

Le point O est à l'intersection des droites

$$\delta = \frac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} = 0.$$

$$\delta_1 = D - D_1 = \frac{d^2 f}{dx_1^2} - \frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0.$$

Mais l'équation de la poloconique de la droite de l'infini est

$$(6)\qquad \left(\frac{d^2f}{dx_1\,dx_2}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx_1^2}\,\frac{d^2f}{dx_2^2} \equiv \delta^2 - \mathrm{DD}_1 = 0;$$

donc δ est la corde des contacts des tangentes D et D_1 à cette poloconique; par suite, la polaire du point O est la conjuguée harmonique de δ_1 relativement aux droites D et D_1, et cette polaire de O, par rapport à la poloconique de la droite de l'infini est représentée par

$$(7)\qquad \mathrm{D} + \mathrm{D}_1 \equiv \frac{d^2f}{dx_1^2} + \frac{d^2f}{dx_2^2} = 0.$$

Mais cette égalité exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la conique polaire d'un point (x_1, x_2, x_3) soit une hyperbole équilatère; elle est donc l'équation du lieu des points dont les coniques polaires sont des hyperboles équilatères.

Donc *la polaire du point O par rapport à la poloconique de la droite de l'infini est le lieu des points dont les coniques polaires sont des hyperboles équilatères.*

9. Les termes du second degré en x_1^2, x_2^2 de la conique polaire d'un point (y_1, y_2, y_3) sont

$$x_1^2\frac{d^2f}{dy_1^2} + 2x_1x_2\frac{d^2f}{dy_1\,dy_2} + x_2^2\frac{d^2f}{dy_2^2}.$$

Ils déterminent les directions asymptotiques, réelles ou imaginaires, de la conique; si ces directions doivent faire entre elles un angle V, on a

$$(8)\qquad \tan^2 V = 4\,\frac{\left(\dfrac{d^2f}{dy_1\,dy_2}\right)^2 - \dfrac{d^2f}{dy_1^2}\,\dfrac{d^2f}{dy_2^2}}{\left(\dfrac{d^2f}{dy_1^2} + \dfrac{d^2f}{dy_2^2}\right)^2}.$$

En regardant, dans cette équation, les y comme des variables, on a le lieu des points dont les coniques polaires sont des courbes semblables. La forme de l'équation montre que ce lieu est une conique ayant, avec la courbe

$$\left(\frac{d^2f}{dy_1\,dy_2}\right)^2 - \frac{d^2f}{dy_1^2}\,\frac{d^2f}{dy_2^2} = 0,$$

un double contact, sur la droite

$$\frac{d^2f}{dy_1^2} + \frac{d^2f}{dy_2^2} \equiv D + D_1 = 0.$$

Donc *le lieu des points dont les coniques polaires sont semblables est une conique ayant un double contact avec la poloconique de la droite de l'infini, sur la polaire du point* O *relative à cette poloconique.*

10. Remarquons ici que la poloconique de la droite de l'infini partage le plan en deux régions; les points de l'une ont pour coniques polaires des ellipses, ceux de l'autre des hyperboles. Par chacun de ces derniers points, il passe, en général, deux droites réelles, parallèles aux asymptotes de la conique polaire, et telles que leurs points d'intersection avec la cubique ont pour centre des moyennes distances le point considéré O. En effet, si dans la relation (1) on fait $OR_1 = \infty$, on doit avoir $OA + OB + OC = 0$, à moins que l'une des longueurs OA, OB, OC ne soit infinie. Il y a donc exception pour les points dont la conique polaire a une asymptote parallèle à une asymptote de la cubique; ce sont les points situés sur les asymptotes de la cubique.

Cette remarque s'étend sans peine à des courbes d'ordre quelconque.

11. Une question qui a quelque rapport avec celles

dont nous nous occupons ici est la recherche des droites dont les poloconiques sont des cercles.

Étant donnée une droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

l'équation de sa poloconique est

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_3} & u_1 \\ \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_2} & \dfrac{d^2 f}{dx_2^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_2\, dx_3} & u_2 \\ \dfrac{d^2 f}{dx_1\, dx_3} & \dfrac{d^2 f}{dx_2\, dx_3} & \dfrac{d^2 f}{dx_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de cette équation contiennent, au second degré, les quantités u_1, u_2, u_3 ; la condition que la poloconique soit un cercle s'exprime par deux relations qui contiennent ces coefficients au premier degré, et qui représentent donc deux courbes de seconde classe, si l'on y regarde les u comme variables. Les droites qui ont pour poloconiques des cercles sont les quatre tangentes communes à ces deux courbes de seconde classe.

Représentons en abrégé par

$$(10)\qquad \mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{F} - \mathrm{G} = 0$$

les équations de ces deux dernières coniques ; la condition que la poloconique d'une droite (u_1, u_2, u_3) soit une hyperbole équilatère est

$$(11)\qquad \mathrm{F} + \mathrm{G} = 0 ;$$

c'est aussi l'équation, en coordonnées tangentielles u, de l'enveloppe des droites qui ont pour poloconiques des hyperboles équilatères ; la courbe représentée par l'équation (11) est aussi de seconde classe.

III.

12. On a vu, dans le § I qu'il existe une infinité de points en ligne droite dont les coniques polaires sont des cercles, dans les cubiques caractérisées par la relation

$$(4) \qquad k\frac{d^2 f}{dx_1\,dx_2} = \frac{d^2 f}{dx_1^2} - \frac{d^2 f}{dx_2^2}.$$

Cette relation continue à être vérifiée si l'on passe à d'autres axes coordonnés rectangulaires, car les conditions pour qu'une équation du deuxième degré représente un cercle ne varient pas pendant ce changement.

Les directions asymptotiques de la cubique s'obtiennent en égalant à zéro l'ensemble des termes du troisième degré en x_2 et x_1. Cette équation en $x_2 : x_1$ a toujours une racine réelle, et, si l'on prend, pour axe des x_1, la direction correspondante, le terme en x_1^3 disparaît ; la courbe a une équation de la forme suivante :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_2^3 + 3a_1 x_1 x_2^2 + 3a_2 x_1^2 x_2 + 3b_1 x_2^2 x_3 + 6b_2 x_1 x_2 x_3 \\ & \qquad + 3b_3 x_1^2 x_3 + 3c_1 x_2 x_3^2 + 3c_2 x_1 x_3^2 + c_3 x_3^3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les directions asymptotiques, autres que l'axe des x_1, sont données par

$$(13) \qquad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 3a_1\frac{x_2}{x_1} + 3a_2 = 0.$$

Mais la condition (4) équivaut à

$$(14) \qquad \frac{-a_1}{a_2} = \frac{a_2 - 1}{a_1} = \frac{b_3 - b_1}{b_2} = k.$$

Appelons $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\beta$ les racines de l'équation (13); l'égalité des deux premiers rapports (14) donne

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \frac{3 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta},$$

ou, après quelques calculs,

$$(15) \qquad \cot\alpha - \cot\beta = \cot(\alpha - \beta).$$

Cette égalité est impossible pour des valeurs réelles de α et β; d'ailleurs on voit directement, en vertu de la première des relations (14), que les racines de l'équation (13) sont imaginaires.

D'autre part, la relation (4) exprime que la poloconique de la droite de l'infini, représentée par

$$\left(\frac{d^2 f}{dx_1\, dx_2}\right)^2 = \frac{d^2 f}{dx_1^2}\,\frac{d^2 f}{dx_2^2},$$

dégénère en deux droites. Donc toutes les droites polaires des points de l'infini passent par un même point et les asymptotes de la cubique sont concourantes.

En résumé, la condition (4) exprime que *les cubiques considérées ont trois asymptotes concourantes, dont une réelle et deux imaginaires conjuguees, ces dernières faisant avec la première des angles α et β tels que*

$$\cot(\alpha - \beta) = \cot\alpha - \cot\beta.$$

13. La condition (4) n'exprime rien de plus, c'est-à-dire que les cubiques jouissant des propriétés que l'on vient d'énoncer satisfont à ladite condition ou aux relations équivalentes (13).

En effet, d'abord, par un calcul inverse, l'égalité (15) conduit à la première des relations (13).

Ensuite, si l'on fait, dans l'équation de la courbe, $x_2 = k_1 x_1 + t_1 x_3$ et $x_2 = k_2 x_1 + t_2 x_3$, k_1 et k_2 étant les racines de l'équation (12), on sait, d'après la théorie générale des asymptotes, qu'elles seront déterminées par les valeurs de t_1 et t_2 qui annulent le terme en x_1^2; l'asymptote réelle est $x_2 = t_3 x_3$, et t_3 se détermine de la même manière. Un calcul assez long montre que si les

trois asymptotes concourent, la seconde des relations (13) est vérifiée ; on simplifie un peu les écritures en prenant l'asymptote réelle pour axe des x_1 ; néanmoins le développement de ce calcul est sans intérêt.

14. Les cubiques considérées dans ce paragraphe jouissent encore de la propriété suivante.

Si O est le point commun aux droites

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{dx_2^2} = 0,$$

la conique polaire de ce point dégénère en deux droites dont l'une est à l'infini, et dont l'autre est l'axe radical des coniques polaires circulaires, ce qui se vérifie par un calcul facile.

Ensuite, *les coniques polaires des points d'une droite quelconque passant par* O *sont homothétiques.*

Car toute droite passant par O est la polaire de quatre points situés sur la conique polaire de O; donc deux de ces points sont à l'infini; les coniques polaires de tous les points de la droite en question passent donc par les deux mêmes points à l'infini et sont homothétiques.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS DE 1898. — SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES [1];

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

Désignons par ω le point dont les trois coordonnées sont égales à l'unité : les points ω et P sont évidem-

[1] *Voir* l'énoncé, 1898, p. 424.

ment conjugués par rapport à toutes les quadriques (formant un réseau ponctuel) qui divisent harmoniquement le segment MM′ et qui admettent les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

1° Parmi ces quadriques, il en est une qui contient la droite Δ, déterminée par M et M′ : le point P est donc dans le plan polaire Π du point ω relativement à cette quadrique; ce plan est donc le lieu du point P, quand M et M′ se déplacent, indépendamment l'un de l'autre, sur Δ.

Si, maintenant, M étant fixe sur Δ, M′ se déplace seul sur cette droite, les points M et M′ ne cessent pas de rester conjugués relativement à toutes les quadriques tangentes en M à Δ; celles de ces quadriques qui sont, de plus, symétriques par rapport aux axes de coordonnées forment évidemment un faisceau ponctuel : le plan polaire du point ω relativement à ces quadriques passe donc par une droite fixe, D, du plan Π, qui constitue alors le lieu du point P.

A deux positions M_1 et M_2 de M sur Δ correspondent ainsi dans le plan Π deux droites D_1 et D_2, dont le point de concours correspond précisément au système des deux points M_1 et M_2. Si M_1 et M_2 tendent à se confondre, il en est de même des droites D_1 et D_2, dont le point de rencontre tend ainsi à devenir un point de l'enveloppe des droites D. Cette enveloppe est donc le lieu du point P, quand M et M′ décrivent la droite D en restant confondus.

Parmi les quadriques tangentes en M à Δ, et admettant pour trièdre principal celui des axes de coordonnées, il existe un cône, et la droite D se trouve dans le plan polaire du point ω par rapport à ce cône; les diverses droites D, correspondant aux diverses positions de M, sont donc les traces sur le plan Π des plans

polaires du point ω par rapport aux cônes qui ont pour axes les axes de coordonnées, et sont tangents au plan $O\Delta$; ces cônes forment évidemment un faisceau tangentiel, et l'enveloppe des plans polaires du point ω est donc un cône du second degré, tangent aux plans de coordonnées; l'enveloppe de la droite D est, par suite, une conique du plan Π, tangente aux traces des plans de coordonnées; on verrait de même qu'elle touche le plan de l'infini, en considérant les cylindres du second degré qui touchent la droite Δ et admettent pour plans principaux deux des plans de coordonnées : cette enveloppe est donc une parabole.

2° et 3° Supposons maintenant que M et M′ décrivent indépendamment l'un de l'autre une même conique Ω. Considérons un plan quelconque Q : il n'existe qu'une quadrique Σ, symétrique par rapport aux axes et telle que le point ω soit le pôle du plan Q : aux couples de points M et M′ de Ω qui sont conjugués à Σ, correspondent, d'après ce qui précède, des points P du plan Q; quant à l'enveloppe des cordes MM′ ainsi obtenues, qui doivent être divisées harmoniquement par la quadrique Σ, c'est, comme on sait, une conique, Γ. A toute section plane de la surface S, décrite par P, correspond ainsi une conique Γ; aux sections, par deux plans Q et Q′, correspondent ainsi deux coniques Γ et Γ', qui ont quatre tangentes communes; les quatre systèmes de points qu'elles déterminent sur Ω fournissent quatre points de S, situés à la fois sur Q et Q′, c'est-à-dire sur leur droite commune; par suite, la surface S est du quatrième degré.

C'est d'ailleurs une surface de Steiner, car il suffit de poser

$$\lambda\lambda' = a, \qquad \lambda + \lambda' = c$$

pour voir que les coordonnées de ses points sont des fonctions rationnelles du second degré de ces deux nouveaux paramètres. A toute section plane de S correspondra une relation du second degré, entre u et v, qui exprimera que les points M et M' sont sur une même tangente à la conique Γ, que nous avons définie géométriquement tout à l'heure.

Les diverses coniques Γ, correspondant aux divers plans de l'espace, dépendent de trois paramètres arbitraires, et sont telles que, si l'on choisit arbitrairement deux d'entre elles, toutes celles du faisceau tangentiel qu'elles déterminent appartiennent à cette famille de coniques (car on obtient ainsi les coniques qui correspondent aux sections de S par des plans issus d'une même droite). L'équation tangentielle de ces coniques est donc de la forme

$$\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 + \lambda_4 \Gamma_4 = 0.$$

Elles sont harmoniquement inscrites aux coniques d'un certain faisceau ponctuel. Parmi ces coniques Γ, il en existe une infinité qui se décomposent en deux points, deux à deux conjugués aux coniques du faisceau ponctuel envisagé : ces points se correspondent donc deux à deux dans une transformation du second ordre, qui est définie, comme on sait, par la donnée de quatre couples de points homologues. Or, on obtient évidemment quatre de ces couples en considérant les points où la conique Ω coupe les plans de coordonnées et le plan de l'infini. Si, en effet, l'un des deux points M et M' qui définissent le point P vient dans un des plans de coordonnées ou dans le plan de l'infini, il en est évidemment de même du point P : les points de S situés, par exemple, dans le plan des YZ correspondent donc aux cordes de Ω qui pivotent autour de chacun des points

où Ω perce ce plan. On les obtiendra en prenant pour λ les racines de l'équation

$$a_2\lambda^2 - 2a_1\lambda + a_0 = 0$$

et en laissant λ arbitraire. Leur lieu se compose donc visiblement de deux coniques. On obtient de même deux coniques dans les autres plans de coordonnées et dans le plan de l'infini.

Considérons maintenant deux points quelconques, μ et μ', se correspondant dans la transformation du second ordre définie par les quatre couples que nous venons d'envisager; aux cordes de Ω, passant par ces points, correspondent les points d'une certaine section plane de S. Or, si la droite MM' passe par μ, les paramètres λ et λ' sont liés entre eux par une relation homographique involutive ou, ce qui revient au même, u et v par une relation linéaire; les coordonnées de P sont, par suite, des fonctions rationnelles du second degré d'un seul paramètre, et il décrit donc une conique. A l'ensemble des points μ et μ' correspond donc une section plane qui se décompose en deux coniques.

On peut choisir arbitrairement le point μ, c'est-à-dire la relation involutive entre λ et λ'; le point μ' est alors bien défini, en général. Si l'on suppose le point μ sur la conique Ω, il lui correspond de même une conique de la surface : nous verrons tout à l'heure à quoi elle est assujettie.

Dans toute transformation du second ordre, il existe, comme on sait, quatre points qui coïncident avec leurs réciproques; à ces couples doubles correspondent quatre plans tangents à S en tous les points d'une même conique.

Les points de rencontre des côtés opposés du quadrangle formé par ces quatre points sont tels que le

conjugué de chacun d'eux est indéterminé sur la droite qui joint les deux autres : soient α, β, γ ces points, et α' un point quelconque de la droite $\beta\gamma$. A l'ensemble $\alpha\alpha'$ correspond une section plane de S, et, quand α' décrit $\beta\gamma$ on obtient ainsi diverses sections planes ayant une partie commune qui correspond au point α : cette partie commune ne peut être qu'une droite, qui est une ligne double de la surface, puisque tout plan passant par cette droite ne coupe en outre S que suivant une conique. Ainsi, aux points α, β, γ correspondent trois droites doubles de la surface : elles forment les arêtes d'un trièdre dont les faces correspondent aux couples (α, β), (β, γ) et (γ, α). Le point commun à ces trois droites est un point triple de S.

Les tangentes menées de α aux diverses coniques Γ forment évidemment une involution, puisque, d'après leur définition même, ces coniques doivent être conjuguées à deux droites fixes issues de α; par suite, toutes les coniques Γ tangentes à une même droite issue de α, le seront à une seconde; or, à ces coniques correspondent sur S des sections planes assujetties seulement à passer par un certain point de la droite double A; ce point correspond donc à deux cordes distinctes issues de α : c'est pourquoi il est double. De même, le point triple correspond aux trois couples de points interceptés sur la conique Ω par les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$.

On peut enfin remarquer que deux coniques quelconques de S ont un point commun; il correspond à la corde de Ω qui passe par les deux points auxquels correspondent ces coniques.

Si les points M et M' décrivent Ω en restant confondus, le point P décrit sur S une courbe gauche du quatrième degré, E; en effet, la conique Ω et une quelconque des coniques Γ ont quatre tangentes communes, aux-

quelles correspondent quatre points d'un même plan situés sur cette courbe. Si la conique Γ touche Ω, deux de ces tangentes communes se confondent, et par suite aussi deux des points où le plan Q coupe la courbe gauche. Si, en particulier, Γ se décompose en deux points, dont l'un est sur Ω, la conique correspondant à ce dernier est tangente à la courbe E. Celle-ci est donc bitangente aux plans de coordonnées et au plan de l'infini.

Si Γ est bitangente à Ω, la relation entre λ et λ' se réduit, comme on sait, à une relation homographique : à ce cas correspond la section de S par un plan bitangent à E.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Géométrie, par *C. Guichard*, professeur à l'Université de Clermont. Première Partie : Géométrie plane et Géométrie dans l'espace.

Le *Traité de Géométrie* de M. Guichard se distingue des Ouvrages analogues par plusieurs innovations qui ne peuvent avoir qu'une heureuse influence sur l'enseignement élémentaire de cette partie fondamentale de la science de l'étendue.

La Géométrie est par excellence la science de la logique, et son étude a surtout pour but de donner aux élèves le souci de la précision dans les définitions et de la rigueur dans les raisonnements. L'une des idées qui ont inspiré l'Auteur du Traité actuel est la nécessité de mettre en garde les débutants contre deux tendances également fâcheuses : la première consiste à admettre *a priori* l'existence de figures possédant des propriétés données, la seconde à déduire de la seule inspection de figures plus ou moins exactes les propriétés de ces figures, sans les faire découler logiquement des définitions. C'est parce que l'Analyse a su s'affranchir de ces tendances relativement à

la représentation géométrique des fonctions qu'elle est arrivée au degré de rigueur qu'on lui connaît.

On ne peut donc qu'approuver M. Guichard d'insister sur ces points fondamentaux. En ce qui concerne le premier, il indique lui-même dans sa préface qu'il faut constamment rappeler aux élèves cette règle de logique : chaque fois qu'on donne une définition, il faut montrer qu'il existe une figure possédant les propriétés indiquées.

En ce qui concerne le second, il s'attache à tout déduire des définitions, au risque d'introduire quelques longueurs : les professeurs, aussi bien que les élèves, n'auront qu'à gagner, à ce point de vue, à la lecture des Chapitres relatifs aux polygones, aux polyèdres et aux propriétés des points intérieurs et extérieurs à ces figures, pour ne citer qu'un exemple entre plusieurs.

Une autre innovation est apportée dans la définition de l'aire intérieure à une ligne plane fermée, et du volume intérieur à une surface; tous ceux qui ont réfléchi à ces notions savent que le Calcul intégral est seul capable d'en donner une définition précise; l'Auteur n'a pas reculé devant les difficultés qu'il y a à présenter ces notions aux élèves dans un enseignement élémentaire; les définitions d'aire et de volume y gagnent ainsi en unité et en précision.

Les qualités de clarté et de précision qui distinguent le Traité actuel lui assurent une large place parmi les Ouvrages d'enseignement et font désirer l'apparition prochaine des compléments annoncés par l'Auteur. H. Vogt.

ERRATA.

3e série, Tome XVIII, 1899, Lignes arithmétiques, par M. G. Tarry :
Page 150, la fig. 1 doit être placée à la page 155, à côté de la fig. 2.

Page 166, ligne 7, *au lieu de* $\frac{1}{D}$, *lisez* $\frac{3}{D}$.

Page 166, ligne 9, *au lieu de* somme, *lisez* moyenne.

[H2c β]

SUR L'ÉQUATION D'EULER :

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}};$$

Par M. E. LACOUR,
Professeur adjoint à l'Université de Nancy.

---

1. Expliquons d'abord sur un exemple simple la méthode qui sera employée pour l'équation d'Euler.

Considérons un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy; un point M de ce cercle est défini par l'angle φ que fait le rayon OM avec Ox, ou encore par la valeur du paramètre $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$. Prenons sur le cercle deux points M et M_1, correspondant à des angles φ et φ_1 et à des valeurs t et t_1 du paramètre t, puis écrivons que la droite MM_1 est tangente à un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon une longueur arbitraire ρ.

La relation entre t et t_1 ainsi obtenue est évidemment équivalente à la suivante :

$$\varphi_1 - \varphi = \alpha,$$

α étant une constante convenablement choisie; elle doit donc conduire, quand on la différentie, à l'équation différentielle

$$\frac{dt_1}{1+t_1^2} - \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

et, comme l'équation finie entre t et t_1 contient une constante arbitraire, ρ, c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre considérée.

La vérification de ces résultats est immédiate. L'équation de la droite MM_1 est :

$$x(1 - tt_1) + y(t + t_1) = 1 + tt_1,$$

si l'on suppose que le rayon du cercle donné a été pris pour unité. La condition pour que cette droite soit tangente à un cercle de centre O et de rayon ρ est

$$\frac{(1 - tt_1)^2 + (t + t_1)^2}{(1 + tt_1)^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

ou encore

$$\frac{(t_1 - t)^2}{(1 + tt_1)^2} = \frac{1 - \rho^2}{\rho^2}.$$

Elle peut s'écrire

$$\frac{t_1 - t}{1 + tt_1} = \text{const.}$$

et elle donne, par différentiation,

$$-(1 + t_1^2)\,dt + (1 + t^2)\,dt_1 = 0.$$

On a donc ainsi une méthode géométrique pour intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dt}{1 + t^2} = \frac{dt_1}{1 + t_1^2}.$$

2. Considérons maintenant la conique (S) définie par les équations

$$(S) \qquad X = x^2, \qquad Y = 2x. \qquad (Y^2 - 4X = 0),$$

où x désigne un paramètre variable, et écrivons que la droite joignant les points M et M_1 de cette conique est tangente à une conique fixe (Σ)

$$(\Sigma) \quad au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

On trouve ainsi une équation doublement quadratique et symétrique entre les paramètres x et x_1 des points M et M_1.

Le premier membre de cette équation, ordonné successivement par rapport à x_1 et par rapport à x, peut s'écrire

$$F(x, x_1) = A x_1^2 + 2B x_1 + C = A_1 x^2 + 2B_1 x + C_1 = 0 ;$$

A, B, C sont des fonctions quadratiques de x, et A_1, B_1, C_1 les mêmes fonctions de x_1.

Si l'on différentie cette équation, on trouve

$$(A_1 x + B_1)\, dx + (A x_1 + B)\, dx_1 = 0 ;$$

puis, en tenant compte de la relation entre x et x_1,

$$\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}\, dx + \sqrt{B^2 - AC}\, dx_1 = 0 ;$$

enfin, en posant

$$\Psi(x) = B^2 - AC,$$

on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx}{\pm\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

Le polynome $\Psi(x)$ est du quatrième degré en x et l'on passe du premier terme au second en remplaçant x par x_1.

Cette équation différentielle du premier ordre se nomme une *équation d'Euler* et l'on voit que, la conique (S) étant donnée, une conique (Σ) conduit à une intégrale particulière d'une équation d'Euler définie par le polynome

$$\Psi(x) = B^2 - AC.$$

3. Cela posé, la question à résoudre est la suivante : Le polynome $\Psi(x)$ étant *donné,* savoir

$$\Psi(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

et la conique (S) étant définie comme plus haut, déterminer la conique enveloppe (Σ) de façon que l'équation d'Euler correspondant à (Σ) soit précisément

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}}.$$

On va voir que le problème ainsi posé est possible et que la solution dépend d'une constante arbitraire.

Pour cela, il suffit d'interpréter géométriquement l'équation

$$\Psi(x) = B^2 - AC = 0.$$

Cette équation, du quatrième degré en x, donne les valeurs de x pour chacune desquelles les deux valeurs correspondantes de x_1 sont confondues, c'est-à-dire elle détermine les points de (S) tels que les deux tangentes menées de l'un de ces points à la conique (Σ) sont confondus ou enfin les points où (S) est rencontrée par (Σ).

Quand $\Psi(x)$ *est donné, la conique* (Σ) *est assujettie à la condition de couper* (S) *aux quatre points définis par l'équation*

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0.$$

On trouve facilement ([1]) que l'équation générale des coniques (Σ) satisfaisant à cette condition est

$$a_0 X^2 + 2a_1 XY + a_2 Y^2 + 2a_2 X + 2a_3 Y + a_4 + \lambda(Y^2 - 4X) = 0.$$

La conique (Σ) étant ainsi déterminée, pour avoir l'équation biquadratique entre x et x_1, il faut prendre l'équation tangentielle de (Σ) et écrire que cette équation tangentielle est vérifiée par les coordonnées de la droite

$$X - \frac{(x + x_1)}{2} Y + x x_1 = 0$$

qui joint les points de paramètres x et x_1.

([1]) Voir *Représentation géométrique des covariants d'une forme biquadratique* (*Nouvelles Annales*, p. 341 ; 1898.

On trouve de cette façon l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 & -\frac{x + x_1}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 & xx_1 \\ 1 & -\frac{x + x_1}{2} & xx_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui contient une constante arbitraire λ. C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle *donnée*, savoir

$$\frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\Psi(x_1)}},$$

où

$$\Psi(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Cette forme d'intégrale a été donnée par Stieljes (*Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1888, p. 222). Si l'on développe le déterminant et si l'on cherche à mettre en évidence des invariants et des covariants du polynome du quatrième degré $\Psi(x)$, on trouve

$$(\tfrac{1}{12}S - \lambda^2)(x - y)^2 + \lambda \Psi_x^y + H_x^y = 0.$$

Dans cette équation, S désigne l'invariant

$$S = a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2,$$

Ψ_x^y est une polaire de $\Psi(x)$, savoir

$$\begin{aligned} \Psi_x^y &= y^2(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) \\ &\quad + 2y(a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3) + (a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4) \\ &= \tfrac{1}{12}(y^2 \Psi''_{x^2} + 2yt\Psi''_{xt} + t^2 \Psi''_{t^2}) \end{aligned}$$

(t désignant la variable d'homogénéité), H_x^y se déduit du Hessien $H(x)$ comme Ψ_x^y se déduit de $\Psi(x)$ et

$$\begin{aligned} H(x) &= (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 \\ &\quad + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 \\ &\quad + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + (a_2 a_4 - a_3^2). \end{aligned}$$

4. Le discriminant de (Σ)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

développé est

$$-(4\lambda^3 - S\lambda - T),$$

S et T désignant les invariants de $\Psi(x)$; c'est le premier membre de l'*équation canonisante* relative au polynome du quatrième degré $\Psi(x)$. Quand λ annule ce discriminant, la conique (Σ) correspondante se réduit à deux droites; le premier membre de son équation tangentielle est le carré du premier membre de l'équation tangentielle du point double.

Donc *quand λ est racine de l'équation canonisante*

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0,$$

le premier membre de l'équation biquadratique en x et y devient le carré d'une expression bilinéaire en x et y. La relation considérée est alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 + \lambda & -\dfrac{x+y}{2} \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & xy \end{vmatrix}^2 = 0.$$

5. *Cas particulier où* $\Psi(x) \equiv 4x^3 - g_2 x - g_3$. — Il suffit dans les résultats précédents de faire

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\tfrac{1}{4} g_2, \qquad a_4 = -g_3;$$

l'équation canonisante devient

$$4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation d'Euler correspondante

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

est

$$\lambda^2(x-y)^2+\lambda\Psi_x^y+\Pi(x,y),$$

où

$$\Psi_x^y=(2xy-\tfrac{1}{2}g_2)(x+y)-g_3,$$
$$\Pi(x,y)=(xy+\tfrac{1}{4}g_2)^2+g_3(x+y).$$

Désignons par e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation canonisante

$$4\lambda^3-g_2\lambda-g_3=0.$$

Lorsque l'on remplace, dans la relation biquadratique entre x et y, λ par l'une de ces racines, e_1 par exemple, nous savons que le premier membre devient le carré d'une fonction bilinéaire de x et de y. En développant les calculs dans ce cas particulier et en tenant compte de l'identité

$$4\lambda^3-g_2\lambda-g_3=4(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3),$$

on trouve que la relation bilinéaire entre x et y, qui correspond à $\lambda=e_1$, est

$$(x-e_1)(y-e_1)=(e_1-e_2)(e_1-e_3).$$

6. La relation biquadratique entre x et y, qui contient au second degré la constante λ, peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction $p(u;\,g_2,g_3)$ dont les invariants g_2 et g_3 sont liés d'une manière convenable aux invariants du polynome biquadratique $\Psi(x)$.

Dans le cas particulier considéré au n° 5, si l'on pose

$$x=p(u;\,g_2,g_3),\qquad y=p(u_1;\,g_2,g_3),$$

l'équation du deuxième degré en λ

$$\lambda^2(x-y)^2+\lambda\Psi_x^y+\Pi(x,y)$$

admet comme racine

$$p(u+u_1)\qquad\text{et}\qquad p(u-u_1);$$

on le vérifie immédiatement en se reportant aux formules qui donnent

$$p(u - u_1) + p(u + u_1) \qquad \text{et} \qquad p(u - u_1)\,p(u + u_1).$$

Dans le cas général, si l'on relie les invariants de la fonction elliptique aux invariants S et T de $\Psi(x)$ par les égalités

$$g_2 = \tau^4\,\mathrm{S}, \qquad g_3 = \tau^6\,\mathrm{T},$$

où τ désigne un facteur de proportionnalité, et si l'on définit un argument v par les égalités

$$\frac{1}{\tau^2}\,pv = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \qquad \frac{1}{\tau^3}\,p'v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{\sqrt{a_0^3}},$$

enfin si l'on fait correspondre à x un argument u et à y un argument u_1 par les formules

$$\frac{\tau}{\sqrt{a_0}}(a_0 x + a_1) = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{a_0}}(a_0 y + a_1) = \frac{1}{2}\,\frac{p'u_1 - p'v}{pu_1 - pv},$$

les racines de l'équation du second degré en λ sont

$$\frac{1}{\tau^2}\,p(u - u_1) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau^2}\,p(u + u_1 + v).$$

Ces résultats se rattachent de très près à l'inversion de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}};$$

nous renverrons pour leur démonstration dans le cas général au *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, 2e Volume, pages 356 et 360.

[A3g]

LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION N'AYANT QUE DES RACINES RÉELLES;

Par M. Antoine PLESKOT,
Professeur à l'École royale de Plzeň (Bohême).

Nous nous proposons de montrer dans cette Note comment, à l'aide de la théorie des maxima et des minima, on peut déterminer les limites des racines d'une équation qui n'a que des racines réelles.

Soit

$$(1) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation n'ayant que des racines réelles.

Désignons la somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de cette équation par s_k, de sorte que

$$s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k.$$

On sait que s_k peut s'exprimer rationnellement en fonction des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Considérons maintenant $n - 2$ racines, à savoir x_2, $x_3, \ldots, x_{n-1}$, comme des variables indépendantes, et considérons par contre les deux restantes x_1 et x_n comme fonctions des autres, définies par les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s_1, \\ x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k} + \ldots + x_n^{2k} = s_{2k}, \end{cases}$$

dans lesquelles s_1 et s_{2k} sont des constantes données.

Nous allons chercher à trouver le système de valeurs de $x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour lesquelles la fonction de x_n ainsi définie devient un maximum ou un minimum.

En effectuant la différentiation, on aura

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + \ldots + dx_n = 0,$$
$$x_1^{2k-1}dx_1 + x_2^{2k-1}dx_2 + x_3^{2k-1}dx_3 + \ldots + x_n^{2k-1}dx_n = 0,$$

relations d'où l'on déduit, en éliminant dx_1,

$$(\beta)\quad \begin{cases} dx_2(x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + dx_3(x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + \ldots \\ \qquad + dx_n(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}) = 0. \end{cases}$$

On a donc, pour le système spécial de valeurs de x_2, $x_3, \ldots, x_{n-1}$ dans lequel x_n devient soit un maximum soit un minimum, les équations suivantes :

$$x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,\quad x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,\quad x_{n-1}^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,$$

ou, puisqu'il s'agit de valeurs réelles, les équations

$$(\gamma)\qquad x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}.$$

On doit joindre ces $n-2$ équations aux deux équations (α) pour déterminer les quantités encore inconnues x_1 et x_n; de là suit le système

$$(\delta)\qquad \begin{cases} (n-1)x_1 + x_n = s_1, \\ (n-1)x_1^{2k} + x_n^{2k} = s_{2k}, \end{cases}$$

dont on peut tout de suite tirer les quantités x_1 et x_n.

Il reste encore à montrer quand x_n devient le maximum et quand il devient le minimum. Pour cela déterminons d^2x_n.

Si l'on différentie (β), on aura

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n}(x_\nu^{2k-1} - x_1^{2k-1})\,d^2x_\nu$$
$$+ (2k-1)\sum_{\nu=2}^{\nu=n}(x_\nu^{2k-2}\,dx_\nu - x_1^{2k-2}\,dx_1)\,dx_\nu = 0.$$

Mais, pour le système spécial $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$dx_n = 0,$$

et, si l'on se sert des équations (γ), on aura tout d'abord l'équation

$$(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1})\,d^2x_n + (2k-1)x_1^{2k-2}\left(\sum_{v=2}^{v=n-1} dx_v^2 - dx_1\sum_{v=2}^{v=n-1} dx_v\right) = 0.$$

Or, à cause de l'équation

$$\sum_{v=2}^{n-1} dx_v = -dx_1,$$

notre résultat doit prendre la forme

$$d^2x_n = -(2k-1)x_1^{2k-2}\frac{\sum_{v=1}^{v=n-1} dx_v^2}{x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}}.$$

Le numérateur du second membre est toujours positif; d^2x_n devient donc positif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est négatif, et il devient négatif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est positif.

Il s'ensuit que x_n a la plus grande valeur quand $x_n > x_1$ et la plus petite quand $x_n < x_1$.

La résolution de l'équation (δ) nous donne deux systèmes de valeurs des quantités x_1 et x_n, comme il va être démontré. Pour le premier système on a $x_n > x_1$, et alors x_n est la racine la plus grande, puisque toutes les autres égalent x_1; pour la deuxième on a $x_n < x_1$, et alors x_n est la plus petite racine.

Il nous reste encore à tirer du système (δ) les valeurs de x_1 et de x_n. Le système aura une forme bien simple si $s_1 = 0$.

Transformons donc l'équation (1) en faisant la substitution

$$x = y - \frac{a_1}{n}.$$

Elle deviendra

$$\psi(y) = y^n + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} - \ldots + a_n = 0.$$

Désignons maintenant la somme des puissances k des racines de cette équation par σ_k, le système (δ) se transformera en

$$(n-1)y_1 \quad + y_n \quad = 0,$$
$$(n-1)y_1^{2k} + y_n^{2k} = \sigma_{2k},$$

parce que $\sigma_1 = 0$.

Il résulte de ces équations

$$y_n = \pm (n-1) \sqrt[2k]{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}},$$

$$y_1 = \pm \qquad \sqrt{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n+1)^{2k-1}]}}.$$

La valeur y_n est donc positive pour le signe supérieur et négative pour le signe inférieur.

La valeur positive de y_n fait atteindre à y_n son maximum et la valeur négative son minimum.

La valeur la plus grande et la plus petite que x_n puisse atteindre sont donc

$$x_n = y_n - \frac{a_1}{n} = -\frac{a_1}{n} \pm (n-1) \sqrt{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1-(n-1)^{2k-1}]}}.$$

Le signe supérieur correspond au maximum et le signe inférieur au minimum.

σ_{2k} peut aussi s'exprimer par s_{2k}. On a les équations

$$y = x + \frac{a_1}{n},$$

et

$$\sum y^{2k} = \sigma_{2k} = \sum \left(x - \frac{a_1}{n} \right)^{2k};$$

donc

$$\sigma_{2k} = \frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{n^{2k}}.$$

En introduisant les valeurs s_k, les limites des racines de l'équation (1) prennent donc, pour la limite inférieure, la forme

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{[1 + (n-1)^{2k-1}](n-1)}},$$

et, pour la limite supérieure,

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1}(2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2}(2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \ldots + n a_1^{2k}}{[1 + (n-1)^{2k-1}](n-1)}}.$$

Dans le cas spécial où $k = 1$, on aura les limites

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n s_2 - s_1^2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n s_2 - s_1^2}{n-1}},$$

qui, si au lieu de s_1 on écrit a_1 et $a_1^2 - 2a_2$ au lieu de s_2, prennent les formes connues

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}.$$

Note. — L'auteur a publié une autre méthode élémentaire qui aboutit aux mêmes limites, dans des Comptes rendus (*Sitzungsberichte*) de la Société royale des Sciences, à Prague, en 1897.

[P2]

SUR L'HOMOGRAPHIE ET LA DUALITÉ APPLIQUÉES AUX PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE L'ESPACE [1];

PAR M. L. RIPERT.

I. — GÉOMÉTRIE AUTOUR DU POINT.

Préliminaires.

1. Les procédés de passage de la Géométrie plane (dans un plan S) à la Géométrie autour d'un point S ayant été indiqués, pour les propriétés *projectives,* dans un précédent article (*Nouvelles Annales,* 1898; p. 446), il suffira de donner ci-après un nombre de définitions suffisant pour montrer que leur application aux propriétés *métriques* n'offre aucune difficulté.

Pour faciliter la comparaison, j'emploierai les mêmes numéros d'ordre que dans l'article relatif aux propriétés métriques planes (1898, p. 446); je conserverai, en outre, les mêmes notations. Il doit être entendu, sans qu'il soit besoin d'en faire mention dans les énoncés, que, de même que, dans la géométrie du plan S, tous les éléments sont dans S, dans la géométrie autour du point S, tous les éléments considérés passent par S. En Géométrie plane dans S, il n'y a que des points et des droites, le seul plan déterminé étant S; de même, dans la géométrie autour de S, il n'y a que des plans et des droites, le seul point déterminé étant S.

[1] Voir *Nouvelles Annales*, p. 101; 1899.

2. Les bases, indépendamment du théorème de Chasles, sur l'invariance du rapport anharmonique, sont : 1° une droite n, intersection de deux plans fixes N_1 et N_2, arbitrairement choisis (r ou i) et déterminant toute une famille de cônes (du 2e degré) *homotangents* (c'est-à-dire astreints à toucher N_1, N_2); 2° et corrélativement, un plan N, jonction de deux droites fixes n_1 et n_2, arbitrairement choisies (r ou i) et qui déterminent toute une famille de cônes *homolinéaires* (c'est-à-dire astreints à avoir pour génératrices n_1 et n_2) [1].

Un cône *homotangent* est déterminé par la donnée du plan polaire de n et d'un plan tangent, ou encore de trois plans tangents. Un cône *homolinéaire* est déterminé par la donnée de la polaire du plan N et d'une génératrice, ou encore de trois génératrices.

Dièdre anharmonique de deux plans.

3, 4. Étant donnée une droite d, par laquelle on mène deux plans A et B et que l'on joint à n par un plan N_d, on considère, dans la famille de cônes homotangents (N_1, N_2), un cône Γ qui sera dit *cône-unité*, ayant pour plan polaire de n un plan arbitraire Q ; soit E un plant tangent à Γ mené par la droite QN_d. On joint les droites QA et n par un plan J, qui coupe E suivant la droite JE, que l'on joint à d par le plan D. Le rapport anharmonique ($ABDN_d$) sera dit le *dièdre anharmonique* des deux plans A et B (les mots : par rapport à n et au cône-unité Γ étant sous-entendus).

5. Si la *fig.* 2 *bis* qui résulterait de cette construction est la corrélative de la *fig.* 2 (5), tous rapports

(1) Le mot *homoponctuel* serait impropre, puisque la géométrie autour de S ne comporte pas de points.

anharmoniques corrélatifs étant égaux, *toute relation entre des longueurs anharmoniques, exprimant une propriété de la fig.* 2, *subsistera entre les dièdres anharmoniques corrélatifs de* 2 *bis et exprimera une propriété corrélative de cette dernière figure.*

6. *Applications.* — 1° Un cône *homotangent*, ayant O pour polaire de n est l'enveloppe des plans M tels que le drièdre anharmonique (O, M) soit constant; la valeur constante de ce dièdre sera dite le *dièdre anharmonique* du cône homotangent.

2° Un cône *non-homotangent* C est l'enveloppe des plans M tels que la somme ou différence de leurs dièdres anharmoniques avec deux plans fixes F et F', qui seront dits *plans focaux* du cône (par rapport à n), soit égale à la valeur anharmonique $2a$ du *dièdre focal* (S, S'), déterminé par F, F', c'est-à-dire du dièdre formé par les plans tangents à C menés par FF'.

Le plan polaire O de n est le conjugué harmonique du plan K de jonction de n et FF', soit par rapport au couple (F, F'), soit par rapport au couple (S, S'). En désignant par R et R' les plans tangents menés à C par la droite d'intersection de O et du plan L passant par n qui est conjugué de K par rapport au cône-unité Γ, les dièdres anharmoniques (O, S) et (O, S') ou a, (O, R) et (O, R') ou b, (O, F) et (O, F') ou c, sont respectivement égaux, avec la relation $a^2 \mp b^2 = c^2$. Les polaires de F et F' par rapport à C sont les *directrices* (par rapport à n) correspondant aux plans focaux, etc.

Angle anharmonique de deux droites (par rapport à N).

7. Étant donné un plan D, jonction de deux droites a et b, et qui coupe le plan fondamental N sui-

vant une droite n_0, on considère, dans la famille de cônes homolinéaires (n_1, n_2), un cône γ, qui sera dit *cône-unité*, ayant pour polaire de N une droite arbitraire q; soit e une génératrice de γ située dans le plan qn_0. On mène le plan qa, coupant le plan N suivant une droite j qui, jointe à e, donne le plan je, coupant D suivant une droite d. Le rapport anharmonique $(abdn_0)$ sera dit l'*angle anharmonique* des deux droites a et b (les mots : par rapport à N et au cône-unité γ étant sous-entendus).

8. Si la *fig.* 3 *bis* qui résulterait de cette construction est la corrélative de la *fig.* 3 (7), *toute relation entre des angles anharmoniques* (*du plan* S), *exprimant une propriété de la fig.* 3, *subsistera entre les angles anharmoniques corrélatifs* (*autour du point* S) *de la fig.* 3 *bis, et exprimera une propriété corrélative de cette dernière figure.*

9. *Applications.* — 1° Un cône homolinéaire ayant o pour polaire de N est le lieu des droites m telles que l'angle anharmonique (o, m) soit constant. Cette valeur constante sera dite l'*angle anharmonique* du cône homolinéaire.

2° Un cône *non homolinéaire* c est le lieu des droites m telles que la somme ou différence de leurs angles anharmoniques avec deux droites fixes f et f', qui seront dites *focales* du cône (par rapport à N) soit égale à la valeur anharmonique 2A de l'*angle focal* (s, s'), formé par les deux génératrices d'intersection de c avec le plan de jonction de f et f', etc.

Laissons au lecteur le soin de *traduire* les numéros suivants :

10, 11, 12. Angle anharmonique (par rapport à n) d'un plan et d'une droite.

13, 14. Angle anharmonique (par rapport à N) d'une droite et d'un plan.

15 à 18. Division anharmonique des dièdres (de plans) et des angles (de droites). Plan central anharmonique d'un dièdre (par rapport à n); son axe anharmonique (par rapport à N).

19, 20, 21. Plans conjugués anharmoniques (par rapport à n) et droites conjuguées anharmoniques (par rapport à N).

22. 23, 24. Éléments anharmoniques des dièdres et des angles de droites.

25 à 28. Bissectrices anharmoniques (par rapport à n) et plans bissecteurs anharmoniques (par rapport à N). Cônes homotangents circonscrit et ex-circonscrit; cônes homolinéaires inscrit et ex-inscrits, etc.

Produits et sommes anharmoniques.

29. J'appellerai *produit anharmonique* S (*par rapport à n*) d'un trièdre, le produit du dièdre anharmonique d'une arête (c'est-à-dire des deux faces qui la déterminent) par la moitié du dièdre anharmonique (11 *bis*) de cette arête avec la face opposée.

Corrélativement, j'appellerai *produit anharmonique* S (*par rapport à* N) d'un trièdre le produit de l'angle anharmonique d'une face (c'est-à-dire des deux arêtes qui la déterminent) par la moitié de l'angle anharmonique (13 *bis*) de cette face avec l'arête opposée.

30. a, b, c étant les dièdres anharmoniques des arêtes et A, B, C les angles anharmoniques des faces, on peut donner à $2p = a + b + c$ et $2P = A + B + C$ les noms de *sommes anharmoniques* du trièdre (par rapport à n ou N).

31, 32. Il est alors facile d'interpréter, pour le trièdre, des formules telles que

$$2S = bc \sin A = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{abc}{2R} = 2pr,$$
$$2s = BC \operatorname{qusin} a = 2\sqrt{P(P-A)(P-B)(P-C)}$$
$$= \frac{ABC}{2r'} = 2PR', \qquad \ldots$$

Enfin il n'est pas difficile de trouver, pour un trièdre, une interprétation *quasimétrique* des dièdres et des angles exprimés en degrés et subdivisions de degrés, et d'une manière générale, de résoudre, par corrélation, toute difficulté qui pourra se présenter.

II. — Géométrie de l'espace.

Préliminaires.

33. Le détail des procédés d'application de l'homographie et de la dualité à la Géométrie de l'espace exigerait de longs développements. Je me bornerai ici à indiquer quelques bases.

L'existence symbolique du plan i de l'infini, contenant le cercle imaginaire Γ_i de l'infini, qui détermine la famille des sphères de l'espace, étant admise, les données fondamentales des transformations sont : 1° un *plan fondamental* n, contenant une conique donnée

(r ou i) Γ_n, qui détermine une famille de quadriques *homoponctuelles* (ou astreintes à passer par Γ_n); 2° et corrélativement, un *point fondamental* N, sommet d'un cône donné (r ou i) γ_N, qui détermine une famille de quadriques *homotangentes* (astreintes à être inscrites à γ_N).

Toutes les quadriques homoponctuelles ou homotangentes étant ainsi assujetties à cinq conditions, quatre conditions restent nécessaires et suffisantes pour en déterminer une. La donnée du pôle de n pour les premières, ou du plan polaire de N pour les secondes, équivaut à trois conditions.

Définitions et applications.

34. La définition de la *distance anharmonique* de deux points ou *longueur anharmonique* d'un segment (4) s'étend à l'espace en remplaçant la conique-unité par une quadrique homoponctuelle Σ (*quadrique-unité*). Par application immédiate, une quadrique *homoponctuelle,* ayant O pour pôle de n est le lieu des points M tels que la longueur anharmonique OM (*rayon anharmonique*) soit constante ([1]).

35. Si l'on considère, dans la famille de quadriques homotangentes, une quadrique σ, dite *quadrique-unité,* ayant pour plan polaire du point fondamental N un plan arbitrairement choisi q, la définition (7) se modifie ainsi : étant donnée une droite D, intersection de deux plans donnés a et b et dont la jonction à N donne le plan n_D, soit e un plan tangent mené à la quadrique-

([1]) *Voir* plus loin, pour les propriétés des quadriques analogues à celles (6, 2° et 9, 2°) des coniques.

unité σ par la droite qn_{D}. On joint la droite qa au point N par le plan j, qui coupe e suivant la droite je que l'on joint à D par le plan d [1]. Le rapport anharmonique $(abdn_{\text{D}})$ sera dit le *dièdre anharmonique* des deux plans a et b (en sous-entendant : par rapport à N et σ).

Par application, une quadrique *homotangente* est l'enveloppe des plans m tels que le *dièdre anharmonique* (o, m) soit constant.

36. La définition (34) conduit immédiatement à celles de la *distance anharmonique d'un point* A *à un plan* p et de la *distance anharmonique d'un point* A *à une droite* D, ces distances étant celles du point A au point d'intersection de p ou D avec la droite ou le plan passant par A et conjugué (par rapport à n et Γ_n) de p ou D.

La définition (35) conduit de même à celles de l'*angle anharmonique d'un plan a et d'un point* P et de l'*angle anharmonique d'un plan a et d'une droite d*, car ces angles sont ceux du plan a avec les plans de jonction de P ou d avec la droite ou le point situés dans a et conjugués (par rapport à N, γ_{N}) de P ou d.

Par application, une quadrique *homoponctuelle* est l'enveloppe des plans dont la distance anharmonique à un point fixe (pôle du plan n) est constante. Une quadrique *homotangente* est le lieu des points dont l'angle anharmonique avec un plan fixe (polaire du point N) est constant.

37. La (plus courte) *distance* de deux droites D et D'

---

[1] De même que, dans la définition (34), les droites JE et d sont dans le plan (ABN_d), de même, dans la définition (35), les droites je et D passent par le point (abn_{D}).

est celle de leurs points d'intersection avec les plans menés par chacune d'elles perpendiculairement au plan de leurs directions communes (plan passant par leurs pieds sur le plan de l'infini).

La *distance anharmonique de deux droites* D *et* D′ est donc celle de leurs points d'intersection avec les plans menés par chacune d'elles et conjugués (par rapport à n, Γ_n) d'un plan passant par la droite de jonction de leurs points de rencontre avec n.

Corrélativement, l'*angle anharmonique de deux droites d et d′* est celui de leurs plans de jonction avec les points pris sur chacune d'elles et conjugués (par rapport à N, γ_N) d'un point pris sur la droite d'intersection de leurs plans de jonction avec N.

Par application, le lieu des points dont les distances anharmoniques à deux droites D et D′ sont égales est une quadrique réglée Q_1, tangente à n. L'enveloppe des plans, dont les angles anharmoniques avec deux droites d, d' sont égaux, est une quadrique réglée Q_2 passant par N.

38. Les définitions et applications qui précèdent correspondent à celles du précédent article (n°s 1 à 18). Il serait facile de faire correspondre de même des définitions et applications (souvent dédoublées) à celles indiquées sous les n°s 19 à 31.

Laissant au lecteur le soin de poursuivre cette étude, dont les principes et le mécanisme sont suffisamment indiqués, il me semble préférable d'examiner l'application des notions qui précèdent à une question importante : celle des foyers des coniques et des quadriques et de leurs éléments corrélatifs (droites focales et plans focaux).

Pour les coniques, la question a déjà été examinée

sommairement et à un point de vue spécial (nos 6, 9 et 12). Mais il importe de rechercher si elle pourrait être traitée par généralisation et dualisation des définitions usuelles d'Euler et de Plücker.

En ce qui concerne les quadriques, je me propose non seulement d'examiner la question des foyers de plans principaux, dont les lieux sont les focales, mais d'indiquer une solution d'une question posée par Chasles en ces termes : « Il est une propriété principale des coniques, qui se retrouve dans les cônes et dont nous n'avons pas encore fait mention relativement aux surfaces du second degré. C'est que : *la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un point d'une conique aux deux foyers est constante*. Nous avons fait, pendant longtemps, des tentatives pour trouver quelque chose d'analogue dans les surfaces, mais sans obtenir aucun succès. Aussi désirons-nous vivement que cette matière offre assez d'intérêt pour provoquer d'autres recherches.... » (Chasles, *Aperçu historique*, Note XXXI, p. 391, 1889, (Gauthier-Villars).

Pour pouvoir étudier ces questions, il est indispensable d'examiner d'abord comment l'on peut modifier les systèmes de coordonnées, de manière à les faire correspondre aux généralisations et dualisations géométriques ci-dessus indiquées. Je me bornerai au système cartésien, le seul en cause pour les questions posées; mais il sera facile de voir que des généralisations analogues s'étendent aux systèmes trilatères et tétraédriques.

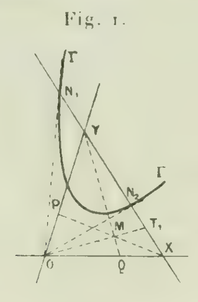
Systèmes de coordonnées.

39. Dans le système cartésien plan, un point M est défini, par rapport aux axes coordonnés OX et OY par les longueurs MP et MQ des segments parallèles à OX

et OY. En d'autres termes, on joint le point M aux points X et Y communs à la droite i et à OX, OY et l'on prend, sur les droites ainsi obtenues, les longueurs métriques (ou par rapport à I_1, I_2) PM et QM des segments compris entre M et OY ou OX.

Plus généralement, on peut considérer (*fig.* 1) le système où sont donnés : 1° deux *axes coordonnés* OX et OY, déterminant le *point-origine* O; 2° une *droite fondamentale* n, déterminée par deux points (r ou i)

Fig. 1.



N_1 et N_2 et coupant OX et OY en X et Y. Par rapport à une *conique-unité* Γ, ayant O pour pôle de n et passant par N_1, N_2, on appellera *coordonnées absolues* d'un point M les longueurs anharmoniques

$$PM = OQ = x, \qquad QM = OP = y,$$

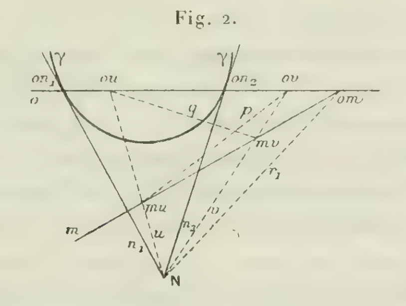
P et Q étant les points d'intersection de MX et MY avec OY et OX. La *coordonnée d'homogénéité* de M est $T_1 M = t$ et l'équation de la droite fondamentale n est $T = 0$.

Si les coordonnées sont *quasi-rectangulaires*, c'est-à-dire si X et Y sont conjugués harmoniques par rapport à (N_1, N_2), les équations données du couple (N_1, N_2) étant $\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} = 0, \; T = 0\right)$, l'équation

$\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} = \lambda$ est l'équation générale des coniques homoponctuelles. L'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$ représente une conique C, ayant O pour pôle de n et admettant OX et OY pour cordes conjuguées à la fois par rapport à Γ et à C (ou *quasi-axes*).

40. Corrélativement (*fig.* 2), on donne : 1° deux *pôles coordonnés ou* et *ov*, déterminant la *droite-origine o*; 2° un *point fondamental* N, déterminé par

Fig. 2.



deux droites (r ou i) n_1 et n_2, et dont les jonctions à *ou* et *ov* sont u et v. Par rapport à une *conique-unité* γ, ayant o pour polaire de N et touchant n_1, n_2, on appellera *coordonnées absolues* d'une droite m les angles anharmoniques

$$(p, m) = (o, q) = \mathrm{U}, \qquad (q, m) = (o, p) = \mathrm{V},$$

p et q étant les jonctions de *mu* et *mv* avec *ov* et *ou*. L'équation du point fondamental N est $r = 0$ et

$$(r_1, m) = \mathrm{R}$$

est la *coordonnée d'homogénéité* de m.

Si les coordonnées sont *corrélatives des quasi-rectangulaires*, c'est-à-dire si u et v sont conjuguées har-

moniques par rapport à (n_1, n_2), les équations données du couple (n_1, n_2) étant $\left(\frac{u^2}{l} + \frac{v^2}{m} = 0, r = 0\right)$, l'équation $\frac{u^2}{l} + \frac{v^2}{m} = \lambda$ est l'équation générale des coniques homotangentes. L'équation $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 1$ représente une conique c, ayant o pour polaire de N et admettant ou et ov pour points conjugués à la fois par rapport à γ et à c (*quasiaxiaux*).

41. Les mêmes principes s'appliquent aux coordonnées de l'espace.

Le système *ponctuel* comporte trois *plans coordonnés* résultant de trois *axes coordonnés* OX, OY, OZ, concourant à l'*origine* O, X, Y, Z étant les intersections de ces axes avec un *plan fondamental* donné n, support d'une conique donnée Γ_n, par laquelle on fait passer la quadrique-unité Σ, ayant O pour pôle de n. Les *coordonnées absolues* d'un point M sont les distances anharmoniques de M aux trois plans coordonnés, comptées à partir de ces plans sur les droites MX, MY, MZ. A tout point M correspond une *coordonnée d'homogénéité* $T_1M = t$, comptée sur la droite OM, à partir du plan n, dont l'équation est $T = 0$. Si les coordonnées sont *quasirectangulaires*, c'est-à-dire si le triangle XYZ est autopolaire par rapport à Γ_n, les équations données de Γ_n étant

$$\left(\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = 0, \qquad T = 0\right),$$

$\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = \lambda$ est l'équation générale des quadriques homoponctuelles. L'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$ représente une quadrique Q ayant O pour pôle de n et

admettant les trois axes coordonnés pour *quasi-axes*, c'est-à-dire pour cordes conjuguées à la fois par rapport à Q et à Σ.

La définition du système *tangentiel* corrélatif, par rapport à trois *pôles coordonnés ou*, *ov*, *ow* d'un *plan-origine o* et à un *point fondamental* N, sommet d'un cône donné γ_N, résulte immédiatement de la précédente; il me paraît superflu de la détailler davantage.

Foyers dans les coniques.

42. On appelle *foyer* (métrique) d'une conique, soit : 1° tout point F tel que sa distance à un point quelconque M de la courbe soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M; soit, 2° tout centre F d'un cercle de rayon nul bitangent à la conique, ou, ce qui revient au même, tout point F par lequel on peut mener à la conique deux tangentes isotropes.

La définition (1°) est due à Euler et la définition (2°) à Plücker. En appliquant l'une ou l'autre à la conique $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$, les coordonnées étant rectangulaires, on trouve les quatre solutions (dont deux toujours réelles et deux toujours imaginaires) :

$$(1)\quad y = 0,\quad x = \pm\sqrt{A - B};\qquad x = 0,\quad y = \pm\sqrt{B - A}.$$

43. Quelques observations sont ici nécessaires.

1° Dans la définition d'Euler, qui se symbolise par l'expression $\delta = p$, δ est une distance, comptée sur une droite de direction indéterminée (rayonnant autour de F) et que l'on considère ordinairement comme toujours positive; p est une fonction linéaire qui, selon les coordonnées de M, peut être positive ou négative. Il se-

rait donc plus exact d'écrire $\delta = \pm p$, ou mieux $\delta^2 = p^2$, et par suite de dire : « On appelle *foyer* d'une conique tout point F tel que *le carré* de sa distance au point quelconque M de la courbe soit égal *au carré* d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M ». Cette rectification de détail peut paraître subtile au premier abord ; il n'en sera plus de même si elle conduit, pour les quadriques, à des conséquences utiles.

2° La définition de Plücker est belle et juste, et en outre féconde, car, après avoir donné les foyers des coniques, elle permet de rechercher ceux des courbes de classe supérieure. Mais elle est un peu déconcertante et difficile à saisir au premier abord ([1]). Dans tous les cas, il est impossible de la traduire par une figure.

3° La question des foyers est du quatrième degré, ce que montrent les quatre solutions (1), ce qui résulte aussi de l'équation du problème $[c^4 - (A - B)^2 = 0]$, où c désigne la distance d'un foyer au centre. Cette équation a toujours deux racines réelles et deux racines imaginaires.

Or, il est de principe que toute question *générale* doit conduire à une équation *générale*. Le caractère d'une équation *générale* du quatrième degré est de présenter, selon les données, soit quatre solutions réelles, soit deux solutions réelles et deux imaginaires, soit quatre solutions imaginaires.

([1]) «... Quand on parle d'une droite (isotrope) qui, en chacun de ses points, est perpendiculaire à elle-même ; d'un foyer qui n'est autre qu'un cercle de rayon nul, doublement tangent à une conique, toutes ces formes de langage sont faites pour surprendre celui qui en ignorerait l'origine purement algébrique ; et elles ne prennent une valeur géométrique que par extension, et aussi parce qu'elles peuvent conduire à d'utiles résultats... » (C.-A. Laisant. *La Mathématique*. p. [illegible])

Pourquoi, dans la question des foyers, trouve-t-on toujours deux solutions réelles et deux imaginaires, jamais quatre solutions réelles ni quatre solutions imaginaires? C'est parce que *la question n'est pas générale;* c'est la question spécialisée par rapport à (i, I_1, I_2); elle doit être susceptible d'une généralisation par rapport à (n, N_1, N_2), qui fournira les trois systèmes de solutions et amènera une dualisation par rapport à (N, n_1, n_2).

44. Ceci posé, par rapport à (n, N_1, N_2), j'appelle *foyer anharmonique* d'une conique C soit : 1° tout point F tel que le carré de sa distance anharmonique à un point quelconque M de C soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M; soit, 2° tout pôle F de n par rapport à une conique homoponctuelle de dimensions nulles (c'est-à-dire passant par F) et bitangente à C.

1° Les équations des points N_1, N_2, dans le système ponctuel quasi rectangulaire (39) étant

$$\left(\frac{X^2}{L}+\frac{Y^2}{M}=0, \qquad T=0\right),$$

et l'équation de la conique C étant $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$, le problème consiste à identifier cette équation de C avec la suivante qui résulte de l'une quelconque de ces définitions, α, β étant les coordonnées d'un point F,

$$M(X-\alpha)^2+L(Y-\beta)^2-(\lambda X+\mu Y+\nu)^2=0.$$

On trouve les quatre solutions :

$$\beta_1=0, \qquad \alpha_1=\pm\sqrt{\frac{AM-BL}{M}};$$

$$\alpha_2=0, \qquad \beta_2=\pm\sqrt{\frac{BL-AM}{L}}.$$

En supposant $L > 0$, les quatre solutions sont réelles pour $BL - AM > 0$, $M < 0$; deux sont réelles et deux imaginaires pour $BL - AM > 0$ et $M > 0$, ou $BL - AM < 0$, $M > 0$; enfin, les quatre solutions sont imaginaires pour $BL - AM < 0$, $M < 0$.

2° Les deux droites isotropes de F étant les droites FI_1 et FI_2, tangentes à C, la définition de Plücker (deuxième forme) est un cas particulier de la suivante : « On appelle *foyers* d'une conique C par rapport à un couple de points (*r* ou *i*) N_1, N_2, les quatre sommets (*r* ou *i*) du quadrilatère circonscrit formé par les quatre tangentes menées de N_1 et N_2 à C. »

Il suffit de regarder la *fig.* 3 pour reconnaître que, par rapport à un couple de points, une conique peut

Fig. 3.

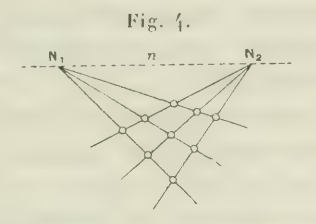
avoir quatre foyers réels, de même qu'elle peut avoir quatre foyers imaginaires (dans le cas, par exemple, où les deux points N_1 et N_2 seraient intérieurs à C).

On aperçoit aussi immédiatement des propriétés (difficiles à constater pour les foyers métriques), par exemple celles qui résultent du quadrilatère *complet* $(N_1 N_2 F F' F'' F''')$.

45. *Remarque.* — La généralisation de la définition de Plücker s'applique avantageusement aux courbes de toutes classes. En appelant *foyer d'une courbe de*

classe M, par rapport à un couple (N_1, N_2), tout point de rencontre d'une tangente issue de N_1 avec une tangente issue de N_2, on voit (*fig.* 4) que toute courbe

Fig. 4.



de classe M a M^2 foyers (r ou i), situés M à M (et de deux manières) en ligne droite.

46. *Corrélativement*, on appellera *focale anharmonique* d'une conique c, par rapport à un couple de droites (n_1, n_2) toute droite f telle que le carré de son angle anharmonique avec une tangente quelconque m à c soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de m; ou encore, toute polaire f de N par rapport à une conique homotangente, touchant la polaire de N par rapport à c et bitangente à c. On déduira de ces définitions toutes les conséquences corrélatives. En généralisant, on appellera *focale d'une courbe d'ordre m*, par rapport à un couple de droites (n_1, n_2), toute droite de jonction d'un point de rencontre de la courbe avec n_1 et d'un point de rencontre avec n_2. D'où il résulte immédiatement que, par rapport à tout couple de droites, une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre a m^2 focales concourant m à m (de deux manières) sur la courbe.

Foyers dans les qudriques.

47. Laissant de côté, pour les surfaces, la définition de Plücker, qui donne les foyers de plans principaux (et

par suite les focales) des quadriques, et à laquelle on pourra appliquer des généralisations et dualisations analogues à celles qui viennent d'être indiquées, reportons-nous à 1837, date de la publication de l'*Aperçu historique;* la définition alors en vigueur pour les foyers des coniques était celle d'Euler.

Chasles, n'apercevant pas sans doute le moyen de transformer cette définition de manière à obtenir les points de ses focales [qu'il n'appelait pas foyers ([1])], a pris un autre point de départ. A une propriété du couple de foyers d'un axe de conique, il a fait correspondre la suivante, qu'il a prise pour définition : « La normale et le plan tangent, menés en un point quelconque d'une quadrique, rencontrent chacun des trois plans principaux en un point et suivant une droite; le point est toujours le pôle de la droite par rapport à une certaine conique (r ou i) située dans le plan principal », et qui est la (conique excentrique ou) *focale* de ce plan principal.

On sait le beau parti que Chasles a su tirer de cette définition; mais je vais essayer de montrer que, même en 1837, la définition d'Euler, convenablement interprétée, était celle qui conduisait le plus naturellement et le plus logiquement à la définition des focales *comme lieux de foyers,* et qu'elle eût même pu mettre sur la voie de la solution de la question posée par Chasles et ci-dessus énoncée (38).

([1]) En lisant la Note XXXI de l'*Aperçu historique,* on voit aisément que la découverte des *coniques excentriques* ou *focales* des quadriques s'est présentée à Chasles *par ces courbes elles-mêmes,* et que ce n'est que plus tard qu'on les a considérées comme *lieux de foyers.* Nulle part, Chasles ne donne de définition, ni géométrique ni analytique, des foyers, des plans cycliques associés, des directrices correspondantes, des cylindres directeurs. Ces définitions et les propriétés qui en résultent sont postérieures.

48. La définition d'Euler, pour les coniques, se symbolise par $\delta^2 = p^2$. Mais, du plan à l'espace, tout se dédouble. En particulier, un axe d'une conique correspond, d'abord à un plan principal d'une quadrique, puis (mais moins directement) à un axe de quadrique. De même, une formule $\delta^2 = p^2$ se dédouble en $\Delta^2 = PP'$ et $\Delta^2 = P^2$, la première correspondance

$$[\delta^2 = p^2, \Delta^2 = PP']$$

étant *la plus directe*. C'est un fait qui n'est pas nouveau, que l'on a pu observer dans un grand nombre de questions et dont voici un exemple caractéristique.

La parabole correspond, en première ligne, aux deux paraboloïdes; en seconde ligne seulement, au cylindre parabolique. Une conique

$$[\varphi(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2] + \ldots = 0$$

est parabole si l'on a $\varphi(X, Y) = p^2$. Une quadrique

$$[\Phi(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY] + \ldots = 0$$

est paraboloïde si l'on a $\Phi(X, Y, Z) = PP'$; elle est cylindre parabolique (ou variété) si l'on a $\Phi(X, Y, Z) = P^2$. On voit encore que : 1° dans $\varphi(X, Y) = p^2$, $p^2 = 0$ est l'équation (quadratique) de direction de l'axe; dans $\Phi(X, Y, Z) = PP'$, $PP' = 0$ est l'équation (quadratique) de direction des plans principaux, dont l'intersection est l'axe; dans $\Phi(X, Y, Z) = P^2$, $P^2 = 0$ est l'équation de direction du plan principal unique; 2° de même, dans $\delta^2 = p^2$, $p^2 = 0$ est l'équation quadratique de la directrice; dans $\Delta^2 = PP'$, $PP' = 0$ est l'équation quadratique des plans associés dont l'intersection est la directrice; enfin, dans $\Delta^2 = P^2$, $P^2 = 0$ est l'équation du plan directeur unique (quand il peut exister).

49. On peut donc donner les définitions métriques suivantes :

1° On appelle *foyer* (*de plan principal*) d'une quadrique tout point F tel que *le carré* de sa distance à un point M de la surface soit égal *au produit* de deux fonctions rationnelles et linéaires (P et P′) des coordonnées de M. Les équations $P = 0$ et $P' = 0$ sont celles de deux plans dits *associés* à F et dont l'intersection est dite *directrice correspondante* (de F).

En appliquant cette définition à une quadrique non de révolution, on trouve les équations des trois focales, plus simplement et plus rapidement qu'avec la définition de Chasles. Je laisse au lecteur le soin de faire cette vérification et d'examiner les généralisations et dualisations que l'on peut tirer de la définition (1°) (1).

---

(1) Les coordonnées étant *quasi rectangulaires* (41),

$$\left[\frac{X^2}{L} + \frac{Y^2}{M} + \frac{Z^2}{N} = 0, \quad T = 0\right]$$

étant les équations de Γ_n, et $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$ celle de la quadrique Q, les équations de la focale φ du plan des YZ, des plans *quasi cycliques* (PP′) associés au foyer $(0, \beta, \gamma)$, de la directrice correspondante D et du cylindre directeur C_φ sont respectivement

$$(\varphi) \qquad \frac{Y^2}{BL - AM} + \frac{Z^2}{CL - AN} = \frac{1}{L}, \qquad X = 0.$$

$$(PP') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{BL - AM}{BM} Y^2 + \frac{CL - AN}{CN} Z^2 \\ &\qquad - 2\frac{L\beta}{M} Y - 2\frac{L\gamma}{N} Z + A + \frac{L\beta^2}{M} + \frac{L\gamma^2}{N} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(D) \qquad Y = \frac{BL\beta}{BL - AM}, \qquad Z = \frac{CL\gamma}{CL - AN},$$

$$(C_\varphi) \qquad \frac{BL - AM}{B^2 L} Y^2 + \frac{CL - AN}{C^2 L} Z^2 = 1.$$

Ces équations vérifiées, on peut se demander et trouver aisément ce qu'elles représentent si l'on change de nom les coordonnées.

2° On appelle *foyer* (*d'axe*) d'une quadrique tout point F tel que *le carré* de sa distance à un point M de la surface soit égal *au carré* (P^2) d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M.

50. En cherchant d'après cette définition (2°) les foyers qui peuvent se trouver sur l'axe OX de la quadrique $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}=1$, on trouve, pour condition nécessaire $B=C$. Ainsi une quadrique non de révolution n'a pas de foyers d'axe (ni réels ni imaginaires). Continuant alors le calcul pour la quadrique $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2+Z^2}{B}=1$, on trouve deux solutions $(y=z=0,\ x=\pm\sqrt{A-B})$. Donc *une quadrique de révolution a, sur son axe, deux foyers* (*réels ou imaginaires*), qui sont ceux de sa section méridienne situés sur cet axe, et ces foyers jouissent de la propriété visée par Chasles comme principale (38).

Or, une quadrique de révolution peut être définie : Une quadrique Q telle que, étant associée à une sphère S, concentrique et bitangente, les sections de Q et de S par des plans conjugués du diamètre de contact (ou axe) soient des cercles, c'est-à-dire des coniques homothétiques (coupant le cercle de l'infini Γ_i aux deux mêmes points fixes).

Cette définition est un cas particulier de la suivante : On appelle *quadrique de révolution homologue* (par rapport à n, Γ_n), une quadrique Q telle que, étant associée à une quadrique homoponctuelle Σ, ayant même pôle O de n et bitangente, les sections de Q et Σ par les mêmes plans conjugués de la corde de contact (*quasi-axe*) soient des coniques homoponctuelles (coupant Γ_n aux deux mêmes points fixes).

Il devient dès lors évident géométriquement que, si

l'on appelle *foyer* (*de quasi-axe*) d'une quadrique Q tout point F tel que le carré de sa distance anharmonique à un point quelconque M de la surface soit égal au carré d'une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de M : une quadrique quelconque Q, rendue de révolution homologue par l'association d'une quadrique homoponctuelle Σ convenablement choisie, a, sur son quasi-axe, deux foyers F, F', qui sont ceux de sa section quasi-méridienne. La somme ou la différence des longueurs anharmoniques des rayons vecteurs menés d'un point de Q aux deux foyers F, F' est constante.

Par rapport à tout plan donné n, le problème a une infinité de solutions. Il suffit en effet (ce qui peut se faire d'une infinité de manières) d'assujettir la conique $\Gamma_n\left(\frac{X^2}{L}+\frac{Y^2}{M}+\frac{Z^2}{N}=0,\ T=0\right)$ à la condition $\frac{B}{M}=\frac{C}{N}$, $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}=1$ étant l'équation de la quadrique Q. Elle est alors rendue de révolution homologue avec quasi-axe OX, et les coordonnées des deux foyers (r ou i) sont $y=z=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{AM-BL}{M}}$.

51. Corrélativement, j'appellerai *quadrique de révolution corrélative* (par rapport à N, γ_N) une quadrique q, telle que, étant associée à une quadrique homotangente σ, ayant même plan polaire o de N et bitangente à q, les cônes circonscrits à q et σ ayant leurs sommets aux mêmes points conjugués de la corde de contact (*quasi-axe corrélatif*) soient des cônes homotangents (touchant γ_N suivant les mêmes plans fixes).

Si l'on appelle *plan focal* (*de quasi-axe*) d'une quadrique q tout plan f tel que le carré de son dièdre anharmonique avec un plan tangent quelconque m à q soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées

de m, une quadrique quelconque q, rendue de révolution corrélative par l'association d'une quadrique homotangente convenable σ, a, pour quasi-axe corrélatif, l'intersection de deux plans focaux (r ou i) f et f'. La somme ou la différence des dièdres anharmoniques formés par un plan tangent à q avec ces deux plans focaux est constante.

Par rapport à tout point donné N, le problème a une infinité de solutions correspondant, pour la quadrique $\left(\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=1\right)$, à un cône quelconque de la famille $\left(\frac{u^2}{l}+\frac{v^2}{m}+\frac{w^2}{n}=0,\ r=0\right)$, avec l'une des conditions $\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$, $\frac{c}{n}=\frac{a}{l}$ ou $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}$, les plans focaux $\left(\text{dans le cas de } \frac{b}{m}=\frac{c}{n}\right)$ ayant pour coordonnées : $v=w=0$, $u=\pm\sqrt{\frac{am-bl}{m}}$.

52. Le cadre de cet article ne me permet pas d'insister davantage. Je crois avoir démontré, d'une manière élémentaire, que, toute propriété métrique pouvant être ramenée à la forme projective, les principes d'homographie et de dualité sont d'une généralité absolue. Leur application est féconde, non seulement par les généralisations et dualisations qu'elle donne immédiatement, mais aussi parce qu'elle rend les propriétés plus faciles à saisir, en permettant de substituer des éléments *réels*, nettement visibles, à des éléments que, sans elle, on ne peut considérer que comme *imaginaires* et qui, par cela même, restent souvent obscurs.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1899.

Composition de Mathématiques spéciales.

On donne une courbe C qui est l'enveloppe des droites D ayant pour équation

$$ux + vy + w = 0,$$

les coefficients u, v, w satisfaisant aux relations

$$\frac{u}{1 + t^2} = \frac{v}{t(1 + t^2)} = \frac{w}{-2Rt},$$

dans lesquelles t est un paramètre variable et R une constante.

Cela étant, on mène à la courbe C six tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, et l'on appelle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 les valeurs du paramètre t qui définissent respectivement les positions de ces six tangentes.

1° Trouver la relation qui doit lier les six paramètres t_i, $i = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, pour qu'on puisse inscrire une conique Γ dans l'hexagone ayant pour côtés les six tangentes T_i.

2° Trouver l'équation générale des coniques Γ_1 qui touchent la courbe C en trois points distincts; montrer que ces coniques sont des ellipses.

3° Démontrer que la somme ou la différence des longueurs des axes des ellipses Γ_1 est constante.

Indiquer les régions du plan où se trouve le centre des ellipses Γ_1 selon que la somme ou la différence de leurs axes est constante.

4° Parmi les ellipses Γ_1 il y en a une qui est une circonférence de cercle. Il y en a une infinité qui se réduisent à une portion de droite AB. Que peut-on dire de l'enveloppe de cette droite et du lieu des points A, B?

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1899.

Mathématiques.

I. Indiquer comment sont situées par rapport au système $Oxyz$ des axes de coordonnées rectangulaires les droites A et B qui ont pour équations

$$(A) \qquad z = 2, \quad y + x = 0,$$
$$(B) \qquad z = -2, \quad y - x = 0.$$

Chercher le lieu des centres S des sphères tangentes à la fois aux droites A et B. Ce lieu est une surface (S) : la reconnaître, et donner ses génératrices rectilignes.

II. Constater sur l'équation de (S) que Ox, Oy, Oz sont des axes de symétrie de cette surface, et montrer que ce résultat pouvait être prévu par la seule connaissance des données du problème.

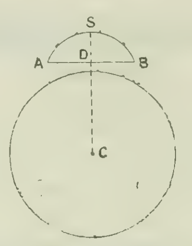
III. De chaque point x, y, z de (S) on déduit un point M, en diminuant l'ordonnée y de $\frac{27}{(2x+1)^2}$. Écrire l'équation de la surface (M) ainsi déduite de (S), et trouver les droites de la surface.

IV. Étudier la forme et les transformations successives des sections de la surface (M) par des plans perpendiculaires à Oz, et, en particulier, les sections faites par les plans $z = 0$ et $z = 1$, cette dernière aussi complètement que possible.

Épure.

Un cylindre droit a pour bases deux cercles de front dont le rayon est de 6^{cm}, et la hauteur de 6^{cm} également. Ce solide supposé opaque est posé sur le plan horizontal, et surmonté

d'une calotte sphérique opaque SADB dont l'axe SD coïncide avec la verticale du centre C du cylindre.



Le rayon de la base de la calotte, DA, est de $2^{cm},6$.

$$CS = 8^{cm}, \qquad CD = 6^{cm},3.$$

Le point C sera placé à 2^{cm} à droite de l'axe vertical qui divise la feuille en deux parties égales : ses projections horizontale et verticale seront à 10^{cm} et à 25^{cm} du bord inférieur de la feuille.

On demande : 1° De représenter par ses deux projections le système CASDB des deux solides.

2° De représenter par une teinte noire légère les ombres déterminées sur le système CASDB et sur le plan horizontal par un point lumineux O situé à 8^{cm} à droite, à 8^{cm} en avant, et à 16^{cm} au-dessus du point C.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer les points remarquables de l'épure.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1899.

Mathématiques.

On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ et l'on considère les surfaces S ayant pour équation générale

$$(S) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{a+\lambda a'} + \frac{y^2}{b+\lambda b'} + \frac{z^2}{c+\lambda c'} \\ &\quad = \frac{m^2}{a+\lambda a'} + \frac{n^2}{b+\lambda b'} + \frac{p^2}{c+\lambda c'}; \end{aligned} \right.$$

a, b, c, a', b', c', m, n, p sont des constantes données et γ un paramètre variable.

I. 1° Soit P le plan polaire d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à une surface S. Lorsque λ varie, A restant fixe, le plan P passe par un point fixe B et enveloppe un cône du second degré C. Ce cône peut-il se décomposer? Soit C' le cône parallèle à C et de sommet O. Que peut-on dire de commun aux cônes C' qui correspondent aux divers points A de l'espace?

2° On suppose que le point A décrive un plan Π : le point B décrit une surface qui est, en général, du troisième degré; ce degré peut-il s'abaisser pour des positions particulières du plan Π?

On suppose que le point A décrive une quadrique Q; le point B décrit une surface, en général du sixième degré; dans quel cas cette surface est-elle une quadrique Q'? Lorsqu'il en est ainsi, si Q est un cône, il en est de même de Q', et réciproquement.

3° On s'astreint à ne considérer que des quadriques Q, Q' ne se décomposant pas, et dont la seconde est décrite par le point B quand le point A décrit la première; soient ω le centre de Q, ω' le centre de Q'. Lorsqu'on donne ω, le point ω' peut-il occuper une position quelconque dans l'espace, ou est-il assujetti à rester sur une courbe, ou sur une surface?

II. 1° On pose $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, $a' = 1$, $b' = 1$, $c' = 0$, $m = 0$, $n = 0$, $p = \gamma$, en sorte que l'équation des surfaces S devient

$$(\Sigma) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1;$$

les résultats des paragraphes précédents sont-ils modifiés?

2° Montrer que par un point A passent deux surfaces Σ réelles, et déterminer leur nature suivant la position de A.

3° Étant donné un plan M, il existe une seule surface Σ tangente au plan M; soit I le point de contact : par le point I passent deux surfaces Σ, dont l'une est tangente au plan M, et la seconde à un autre plan N. Ce plan est ainsi déterminé lorsqu'on donne le plan M.

On suppose que le plan M soit assujetti à passer par un point fixe P; le plan N dépend alors de deux paramètres. Lieu

du pôle du plan N par rapport à la sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2-1=0$. (On ne demande pas de discuter ce lieu, mais d'indiquer tout au moins d'une manière précise les opérations à faire pour avoir son équation.) Quelle position doit occuper le point P pour que ce lieu se réduise à un plan?

N. B. — Il est inutile de reproduire cet énoncé sur les copies.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1739.

(1896, p. 392.)

On donne une ellipse de centre O. On mène une corde quelconque ab et l'on prend son pôle c par rapport à l'ellipse. Le point p étant la projection sur Oc de l'orthocentre du triangle abc, démontrer que le produit de op par oc est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse donnée. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème qui fait l'objet de la question 1659, résolue à la page 150 de ce Recueil : le point c et l'orthocentre h du triangle abc sont conjugués par rapport au cercle orthoptique de l'ellipse donnée.

En voici une autre démonstration :

Considérons les triangles ca_1b_1 et ca_2b_2 formés par les côtés ca et cb, et par les tangentes a_1b_1 et a_2b_2 à l'ellipse, parallèles à la corde ab; soient h_1 et h_2 leurs orthocentres. Les points h, h_1 et h_2 sont, sur le plan de la figure, les projections des points H, H_1 et H_2 d'où l'on voit respectivement sous des angles droits les côtés des triangles cab, ca_1b_1 et ca_2b_2, et le point H est évidemment le conjugué harmonique du point c rapport au segment H_1H_2. D'autre part, d'après un théorème de M. Faure, les cercles conjugués aux triangles

ca_1b_1 et ca_2b_2, cercles harmoniquement circonscrits à l'ellipse, coupent orthogonalement son cercle orthoptique : ces cercles ont, d'ailleurs, pour centres les points h_1 et h_2, et les carrés de leurs rayons sont égaux et de signes contraires aux carrés des segments $h_1\text{H}_1$ et $h_2\text{H}_2$: de là résulte que les points H_1 et H_2 se trouvent sur la sphère qui admet le cercle orthoptique pour grand cercle. Le plan polaire du point c, par rapport à cette sphère, contient donc le point H, et le point h se trouve, par suite, sur la polaire du point c par rapport au cercle orthoptique.

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, soient x, y les coordonnées du point C. L'orthocentre H du triangle formé par les tangentes à l'ellipse issues de C et, par la corde des contacts, a pour coordonnées

$$\xi = \frac{x(a^2b^2 + b^4 + c^2y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}, \qquad \eta = \frac{y(a^2b^2 + a^4 - c^2y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

(*Voir* par exemple : Kœhler, *Exercices de Géométrie*, première Partie, p. 29.)

Le produit OP × OC est la puissance de l'origine par rapport au cercle décrit sur CH comme diamètre, laquelle a pour valeur

$$x\xi + y\eta,$$

c'est-à-dire, en effectuant, $a^2 + b^2$. C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien, Dulimbert, H. Lez, E. Malo, A. Provost, E. Taratte, la plupart analytiques.

Question 1740.

(1895, p. 392.)

Étant donnée une quadrique, trouver les quadriques qui la coupent orthogonalement. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une quadrique orthogonale à l'ellipsoïde rapporté à ses axes,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En exprimant l'orthogonalité des deux surfaces en tous les points de leur ligne commune, il vient la relation

$$(3) \qquad \frac{x f'_x}{a^2} + \frac{y f'_y}{b^2} + \frac{z f'_z}{c^2} = 0.$$

Les points communs aux quadriques (1) et (2) devant être situés sur la quadrique (3), on a l'identité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = x f'_x \left(\frac{\lambda}{a^2} + \mu\right) + y f'_y \left(\frac{\lambda}{b^2} + \mu\right) + z f'_z \left(\frac{\lambda}{c^2} + \mu\right) + \mu t f'_t,$$

t désignant une variable d'homogénéité (théorème d'Euler).

Cette identité montre de suite que la fonction du deuxième degré, $f(x, y, z)$, ne contient pas de termes du premier degré ni de doubles produits. En l'explicitant, il vient de suite

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} - 1 = 0,$$

où l'on a posé

$$k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Les quadriques orthogonales sont donc les quadriques homofocales à l'ellipsoïde donné.

Solution analogue pour le paraboloïde.

Question 1741.

(1896, p. 392.)

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation en coordonnées rectangulaires d'un hélicoïde développable quelconque dont le cône directeur a pour axe oz; démontrer que toute surface-moulure peut être représentée par l'équation

$$F(z) = f(x, y).$$

(Th. Caronnet.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Une surface-moulure S dont le noyau C est parallèle à oz est coupée par le plan $z=h$ suivant une développante D de la section droite de C. Soit $\zeta=\varphi(\xi)$ l'équation de la génératrice de S, rapportée à une droite de son plan $\omega\zeta$ parallèle à oz et à la trace de son plan sur xoy, trace qui roule sur la base de C. Si l'on compte les arcs σ de cette base à partir du point où ω vient se placer dessus, le point de rebroussement de Δ sera situé sur la génératrice de C définie par $\varphi(\sigma)=h$.

Un hélicoïde développable H dont la directrice est située sur C est coupé par un plan $z=k$ suivant une développante de la section droite de C, dont le point de rebroussement est situé sur l'hélice directrice, c'est-à-dire sur la génératrice de C définie par $a\sigma=k (a=\text{pas})$.

Les deux sections auront même projection sur xoy si les points de rebroussement sont situés sur la même génératrice de C, c'est-à-dire si

$$h=\varphi\left(\frac{k}{a}\right),$$

d'où l'on tire

$$k=F(h).$$

Dès lors, si

$$z=f(x,y)$$

est l'équation de H, la projection commune des deux sections aura pour équation

$$f(x,y)=k=F(h),$$

et S sera représentée par l'équation

$$f(x,y)=F(z).\qquad\text{C. Q. F. D.}$$

Question 1748.

(1896, p. 488.)

Si une conique est inscrite à un triangle ABC *en* α, β, γ *les droites joignant les milieux de* BC, CA, AB *aux milieux de* Aα, Bβ, Cγ *concourent au centre de la courbe. Étant donnés le centre d'une conique et trois tangentes, trouver les points de contact.* (P. Sondat.)

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

Considérons les coniques tangentes aux côtés de ABC, touchant BC en un point fixe α; elles font partie d'un faisceau tangentiel, donc leurs centres sont en ligne droite; parmi ces coniques se trouvent les coniques aplaties BC et $A\alpha$; d'où suit la première partie.

Soit O le centre d'une conique inscrite au triangle ABC en α, β, γ : la droite MO (M étant le milieu de BC) coupe $A\alpha$ en son milieu : donc la parallèle à MO, à la même distance de MO que le point A, coupe BC en α.

Autres solutions par MM. A. DROZ-FARNY, E.-A. MAJOL, A. PREVOST.

Question 1766.

(1897, p. 243.)

On donne un cylindre de révolution et un cône dont l'axe de révolution est parallèle aux génératrices du cylindre. On déplace un cône de grandeur constante, dont l'axe de révolution reste parallèle aux génératrices du cylindre, de façon que son sommet décrive la courbe d'intersection du cylindre et du cône donnés. On demande l'enveloppe de la trace de ce cône mobile sur un plan de section droite du cylindre. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. DULIMBERT.

Je prends pour axe des z l'axe du cylindre, pour plan des xy le plan de section droite du cylindre qui passe par le sommet du cône, pour plan des zx le plan des axes des deux surfaces. Il s'agit de trouver l'enveloppe de la trace du cône mobile sur le plan des xy.

L'équation du cylindre est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

celle du cône

$$(x - a)^2 + y^2 - h^2 z^2 = 0.$$

Je prends un point M de la section du cylindre par le plan

des xy. Les coordonnées de ce point sont

$$x = R\cos\omega,$$
$$y = R\sin\omega,$$
$$z = 0.$$

Il est la projection de deux points de la courbe d'intersection situés dans les plans symétriques par rapport aux xy

$$z^2 = \frac{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}{h^2}.$$

Donc le carré du rayon du cercle, trace du cône mobile sur le plan des xy, est égal à

$$\lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta),$$

en désignant par λ le rapport des tangentes des angles générateurs du cône mobile et du cône fixe.

L'équation du cercle enveloppé est donc

$$(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2 = \lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2R\cos\theta(x - \lambda^2 a) - 2Ry\sin\theta$$
$$+ R^2 - \lambda^2(a^2 + R^2) = 0.$$

Il est évident que la puissance du point C dont les coordonnées sont

$$x = \lambda^2 a,$$
$$y = 0,$$

par rapport à un cercle quelconque du faisceau est constante et égale à

$$(\lambda^2 a^2 - R^2)(\lambda^2 - 1).$$

Donc l'enveloppe cherchée est la courbe anallagmatique enveloppe d'un cercle dont le centre décrit le cercle de section droite du cylindre donné et qui coupe orthogonalement le cercle fixe ayant pour centre le point C et pour rayon

$$\sqrt{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)}.$$

Pour avoir l'équation de la courbe, je transporte l'origine au point C. L'équation du cercle enveloppé devient

$$(x + \lambda^2 a - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2$$
$$= \lambda^2(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta).$$

ou, en développant et réduisant,

$$x^2 + y^2 + 2\lambda^2 a x - 2 R x \cos\theta$$
$$+ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2) - 2 R y \sin\theta = 0.$$

En coordonnées polaires, l'équation du cercle est

$$\rho^2 + 2\lambda^2 a \rho \cos\omega + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)$$
$$- 2 R \rho \cos\omega \cos\theta - 2 R \rho \sin\omega \sin\theta = 0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient immédiatement. Elle est

$$\rho^2 + 2\rho(\lambda^2 a \cos\omega \pm R) + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2) = 0,$$

ou en coordonnées cartésiennes

$$[x^2 + y^2 - 2\lambda^2 a x + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 a^2 - R^2)]^2 - 4 R^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

QUESTIONS.

1824. Démontrer qu'une fonction entière, à coefficients entiers, de la forme

$$(1) \qquad x^5 - a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 - a_4 x + 1,$$

qui ne s'annule pas pour $x = 1, -1$, ne peut avoir que les diviseurs

$$x^2 + \alpha x - 1, \quad x^2 + \beta x + 1,$$

α étant un diviseur commun aux nombres

$$1 + a_2 + a_4, \quad a_1 - a_3 + 1,$$

et β un diviseur commun aux nombres

$$1 - a_2 + a_4, \quad a_1 - a_3 + 1.$$

On voit que ce théorème donne une méthode simple pour décomposer une fonction (1) en ses facteurs irréductibles.

(P. Burgatti.)

1825. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont coupés en A′, B′, C′ par les bissectrices extérieures des angles opposés et en A″, B″, C″ par la droite r sur laquelle se trouvent le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit. Démontrer que les trois cercles AA′A″, BB′B″, CC′C″ se coupent sur la droite r. (G. Gallucci.)

[K7a]

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

Par M. Léon AUTONNE.

1. On sait que le rapport anharmonique K de quatre quantités x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) est susceptible de six valeurs K_j ($j = 0, \ldots, 5$), en général différentes, toutes fonctions d'une quelconque d'entre elles. On trouvera dans Clebsch (*Leçons sur la Géométrie*, traduction A. Benoist, t. I, p. 49 et suiv.) une discussion des relations qui existent entre les K_j. Je me propose de reprendre la question en insistant sur les liens qui unissent la théorie à celle des groupes de substitutions entre quatre lettres. La terminologie et les notations seront celles de M. Jordan, classiques en matière de substitutions.

2. Soit G le groupe des 24 substitutions entre 4 lettres. On peut se représenter comme suit la constitution de G. Un groupe g contient les quatre substitutions

$$1. \qquad \alpha = (12)(34), \qquad \beta = (13)(24), \qquad \alpha\beta = \beta\alpha = (14)(23).$$

g est permutable à $\delta = (4)(123)$. Combinant g et δ, on a le groupe alterné G' de 12 substitutions. G' est permutable à $\varepsilon = (1)(4)(23)$. G' et ε fournissent G. g est permutable à ε. g et ε fournissent un groupe h d'ordre huit. Il existe trois pareils groupes h, h', h'' que δ permute circulairement.

3. Désignons par (ij) la différence $x_i - x_j$ et po-

sons (Clebsch, *loc. cit.*, p. 49)

$$\frac{(31)(42)}{(32)(41)} = K_0; \qquad \frac{(12)(43)}{(13)(42)} = K_1 = \frac{K_0 - 1}{K_0};$$

$$\frac{(23)(41)}{(21)(43)} = K_2 = \frac{1}{1 - K_0}; \qquad \frac{(21)(43)}{(23)(41)} = K_3 = 1 - K_0 = \frac{1}{K_2};$$

$$\frac{(13)(42)}{(12)(43)} = K_4 = \frac{1}{K_1} = \frac{K_0}{K_0 - 1}; \qquad \frac{(32)(41)}{(31)(42)} = K_5 = \frac{1}{K_0}.$$

Les déplacements des six lettres K_j forment un groupe $\mathcal{A}$, lequel est isomorphe à G avec hémiédrie. A la substitution unité de $\mathcal{A}$ correspond dans G le groupe g; à δ et ε correspondent respectivement dans $\mathcal{A}$

$$D = (012)(543),$$
$$E = (03)(14)(25).$$

$\mathcal{A}$ est d'ordre six, car $E^{-1}DE = D^2$, le groupe des puissances de D est permutable à E.

g est, comme il le faut, contenu dans G et permutable à ses substitutions.

4. A $\mathcal{A}$ est isomorphe holoédriquement un groupe A linéaire binaire. Posons

$$\tau_1 = (23)(14), \qquad \tau_2 = (31)(24), \qquad \tau_3 = (12)(34)$$

$\left(\text{d'où } \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0,\ K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)$ et ensuite

$$\lambda_1 = \tau_2 - \theta\tau_1, \qquad \lambda_2 = \tau_2 - \theta^2\tau_1.$$

θ = racine primitive cubique de l'unité. A dérivera des deux substitutions linéaires homogènes binaires

$$d = |\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad \theta^2\lambda_1 \quad \theta\lambda_2|,$$
$$e = |\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad \lambda_2 \quad \lambda_1|,$$

qui correspondent respectivement à D et E. On voit que d est mise sous forme canonique.

5. Nommons X l'équation du quatrième degré

$$0 = f(x) = \prod_i (x - x_i) = x^4 - 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

dont les x sont racines. Tant que les x et K sont quelconques, G est le groupe de X. Introduisons (Clebsch, *loc. cit.*, p. 284) les deux invariants

$$I = 2(a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$
$$J = 6(a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1^2a_4)$$

et l'invariant absolu $\Omega = I^3J^{-2}$ du polynome $f(x)$. On aura (Clebsch, *loc. cit.*, p. 297) les équations

$$(\Phi) \quad \begin{cases} F(\Omega, K) = \Omega[(K+1)(K-2)(1-2K)]^2 \\ \qquad\qquad - 24(K^2 - K + 1)^3 = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(\Psi) \qquad \mathfrak{F}(\Omega; \lambda_1, \lambda_2) = \Omega(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)^2 - 24\lambda_1^3\lambda_2^3 = 0$$

Pour Ω donné, les six racines de Φ sont les K_j. $\mathfrak{K}$ est le groupe de Φ. Toutes les substitutions de $\mathfrak{K}$ déplacent toutes les racines; cela devait être, car tous les K_j s'expriment rationnellement en K_0. La connaissance des K_j, c'est-à-dire la résolution de Φ, réduit le groupe G de X aux substitutions qui laissent tous les K invariables, c'est-à-dire au groupe g.

Quand une figure de géométrie P, composée de quatre éléments, est définie par le rapport anharmonique K, il est en général inutile et gênant quelquefois d'avoir à distinguer les six valeurs de K. On opérera de préférence sur l'invariant absolu Ω, qui donne la véritable mensuration de P.

6. Les considérations précédentes subissent de sensibles modifications pour des valeurs particulières des K. Pour faire la discussion, j'examine la structure du

groupe $\mathcal{A}$ et ce qu'elle peut éventuellement devenir. $\mathcal{A}$ dérive de D et E. Peut-il perdre D ou E? Autrement dit, D ou E peuvent-elles, pour un choix approprié des K, se réduire à l'unité.

Cela ne serait pas difficile à exprimer, mais il est encore plus rapide d'opérer sur le groupe A (4), c'est-à-dire sur les substitutions d et e, et d'exprimer que $d = 1$ et $e = 1$.

7. Pour que $d = 1$, il faut et il suffit que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$. Si $\lambda_1 = 0$, $\tau_2 = \theta\tau_1$, $K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = -\theta$; si $\lambda_2 = 0$, de même $K_0 = -\theta^2$. Dans les deux hypothèses

$$K_0^2 - K_0 - 1 = 0.$$

On sait que c'est le cas dit *équianharmonique*. Alors

$$K_0 = K_1 = K_2 = -\theta, \qquad K_3 = K_4 = K_5 = -\theta^2.$$

Les K_j se répartissent en deux systèmes de trois valeurs égales.

8. Pour que $e = 1$, il faut et il suffit que ou $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Si

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 = 2\tau_2 + \tau_1. \qquad K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{1}{2},$$

alors

$$K_0 = K_3 = \tfrac{1}{2}, \qquad K_1 = K_4 = -1, \qquad K_2 = K_5 = 2.$$

Les six K_j se répartissent en trois couples de valeurs égales. On sait que c'est le cas dit *harmonique*.

Si

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \tau_1 = 0, \qquad K_0 = -\frac{\tau_2}{\tau_1} = \infty, \qquad \tau_1 = (23)(14) = 0,$$

deux des quatre x_i sont égales. Alors

$$K_0 = K_3 = \infty, \qquad K_1 = K_4 = 1, \qquad K_2 = K_5 = 0.$$

Nous dirons que c'est le *cas d'égalité*. Les K_i se répartissent comme dans le cas harmonique.

9. Dans les cas harmonique et d'égalité, $\mathfrak{K}$ se réduit à D et cesse d'être transitif. Φ devient réductible. Effectivement, dans le cas harmonique (5),

$$J = 0, \qquad \Omega = \infty, \qquad F = [(K+1)(K-2)(1-2K)]^2,$$

les racines sont bien $\frac{1}{2}$, 2, — 1, chacune double. Dans le cas d'égalité, le discriminant $I^3 - 6J^2$ de X est nul, $\Omega = 6$, l'équation Ψ (5) devient

$$\mathcal{F} = (\lambda_1^3 - \lambda_2^3)^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3)^2 = 0.$$

Les valeurs racines de $K_0 = -\tau_2 : \tau_1$ sont bien ∞, 1, 0, chacune double.

Dans le cas équianharmonique, $\mathfrak{K}$ se réduit à E et cesse d'être transitif. X est encore réductible. Alors en effet

$$F = (K^2 - K + 1)^3 = 0,$$

car $I = \Omega = 0$, les deux racines $-\theta$ et $-\theta^2$ sont triples.

10. Dans les trois cas particuliers (équianharmonique, harmonique, d'égalité) les quatre x ne sont plus simultanément arbitraires. Le groupe de l'équation X du 5 n'est plus le groupe général entre quatre lettres.

Pareillement, il n'est plus licite d'opérer entre les x tous les déplacements possibles. Soit S le système des relations qui existent entre les x; on ne pourra opérer sur les x d'autres déplacements que ceux vis-à-vis desquels S possède la propriété de l'invariance. Soit G_1, contenu dans G, le groupe de ces déplacements; nommons encore $\mathfrak{K}$ le groupe des déplacements des K_i. Les

relations entre G_1 et $\mathcal{R}$ seront tout autres qu'au numéro 3.

11. *Cas équianharmonique.* — Le système S est formé (n° 7) par l'unique équation $\lambda_1 = \tau_2 - \theta\tau_1 = 0$. ε changeant λ_1 en λ_2, on devrait avoir aussi

$$\lambda_2 = \tau_2 - \theta^2\tau_1 = 0,$$

d'où $\tau_1 = \tau_2 = 0$, c'est-à-dire le cas d'égalité. Cela est absurde; ε est exclue de G_1, qui se réduit au groupe alterné G'. Il n'existe dans G' aucune substitution qui fasse passer de K_0 à K_3. Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à la substitution $(K_0 K_3)$ou E.

12. *Cas harmonique.* — Le système S est formé (8) par l'équation $2\tau_2 + \tau_1 = 0$, c'est-à-dire $\tau_2 = \tau_3$. δ permute circulairement les τ et, si l'on admettait δ dans G_1, on aurait $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, c'est-à-dire, en vertu de $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$; c'est le cas d'égalité. Ainsi δ est exclue de G_1, qui dérive de g et de ε, c'est-à-dire coïncide avec h (2). Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à $D = (K_0 K_1 K_2) = (\frac{1}{2}, -1, 2)$ (8).

13. *Cas d'égalité.* — Le système S comprend par exemple (8) l'équation $(14) = x_4 - x_1 = 0$. G_1 ne peut provenir que des transpositions $(14)(23)$, c'est-à-dire des substitutions $\alpha_1\beta$ et ε (2). Au contraire, $\mathcal{R}$ se réduit à $D = (K_0 K_1 K_2) = (\infty, 1, 0)$.

14. Je n'approfondirai pas davantage la présente discussion, laquelle se confond désormais avec celle de l'équation du quatrième degré, matière bien connue.

[J4f]

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS;

PAR M. COMBEBIAC.

La théorie des groupes de transformations finis et continus, fondée par M. Sophus Lie, a été exposée par son génial auteur dans un Ouvrage ([1]) qui n'est pas traduit dans notre langue et qui d'ailleurs peut rebuter par sa richesse même.

Nous croyons être utiles à un certain nombre de lecteurs en exposant, réunies par un lien logique et élémentaire, plusieurs des notions principales mises en œuvre dans les travaux de M. Sophus Lie et de ses continuateurs.

I. — TRANSFORMATIONS.

On appelle *transformation* l'ensemble de n équations à n variables de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ x'_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x'_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}\right.$$

que nous représenterons, pour simplifier, par

$$(1)\qquad x' = f(x).$$

([1]) S. LIE, *Theorie der Transformations Gruppen* T. *in* 3, *Abschnitten*, gr. in-8, Teubner, Leipzig. — I Abschnitt (X, 632 S.), *Allgemeine Eigenschafften*, 1888. — II Abschnitt (VIII, 555 S.), *Berührungs Transformationen*, 1890. — III Abschnitt (XVII, 831 S.), 1893.

Si les variables x représentent, par exemple, un point de l'espace, une transformation fait correspondre à chaque point x un point x'. Telles sont une inversion, une homothétie, une translation, etc.

Si, à la suite d'une transformation S, on effectue une autre transformation S', on obtient évidemment une nouvelle transformation, que l'on désigne par S'S. Il est facile de se rendre compte que S''(S'S) est identique à (S''S')S, c'est-à-dire que la composition des transformations est soumise à la loi associative et, par suite, que l'expression S''S'S a une signification, sans qu'aucune parenthèse soit nécessaire.

Les équations (1) sont solubles par rapport à x_1, x_2, ..., x_n, pourvu qu'il n'existe pas de relations $F(x') = 0$ entre x'_1, x'_2, ..., x'_n, c'est-à-dire pourvu que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient indépendantes, ou encore que le déterminant fonctionnel de ces fonctions ne soit pas nul. Il existe donc généralement une transformation

$$x = \varphi(x')$$

telle que l'application successive de f et de φ ait pour résultat la transformation identique.

En continuant à assimiler la composition des transformations à la multiplication, il est naturel de représenter par l'unité la transformation identique et par S^{-1} la transformation inverse de S.

Il est clair que, dans un produit de transformations, l'ordre des facteurs ne peut pas être changé.

Si les n variables x sont les coordonnées d'un élément ayant une existence réelle, tel qu'un être géométrique : point, plan, droite, sphère, etc., une transformation effectuée sur ces variables peut être interprétée de deux façons :

Elle peut être en effet interprétée comme un change-

ment de coordonnées, l'élément représenté d'abord par x l'étant ensuite par $f(x)$.

Elle peut aussi être interprétée comme une transformation réellement effectuée sur l'élément même représenté par x.

Soit une transformation

$$x' = T(x).$$

Appliquons aux deux éléments x et x' la transformation

$$y = S(x).$$

On a

$$S^{-1}(y') = TS^{-1}(y)$$

ou

$$y' = STS^{-1}(y).$$

Si l'on considère S comme représentant un changement de coordonnées, STS^{-1} est l'expression de T dans le nouveau système de coordonnées.

Si S représente une transformation effectuée sur tous les éléments P du domaine considéré, STS^{-1} représente ce que devient T par suite de cette transformation.

On peut retrouver cette expression par une voie plus intuitive :

Cherchons, pour cela, l'élément en lequel se transforme l'élément P dans les nouvelles conditions.

L'élément P, avant l'application de S, se trouvait en $S^{-1}(P)$, et par suite se transformait par T en $TS^{-1}(P)$. Par l'application de S à tout le domaine, ce dernier élément devient $STS^{-1}(P)$. La transformation T est donc devenue STS^{-1} par l'application de S.

Si l'on a

$$STS^{-1} = T.$$

T n'est pas changée, et l'on dit que T admet S.

On a alors

$$ST = TS,$$

c'est-à-dire que les transformations S et T sont *commutatives*.

La propriété est réciproque, c'est-à-dire que si T admet S, S admet T.

II. — Séries de transformations. Paramètres essentiels.

Si, dans les équations (1), les fonctions f dépendent de r paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_r$, dont nous désignerons l'ensemble par e, ces équations représentent une série composée généralement de ∞^r transformations. Le nombre des transformations différentes serait diminué, s'il était possible de faire varier les paramètres e sans changer les x'. Dans ce cas, il serait possible de remplacer les paramètres par d'autres en nombre moindre, et l'on dirait alors que les r paramètres e ne sont pas essentiels.

A moins de mention contraire, nous supposerons que les paramètres sont essentiels.

III. — Groupes de transformations.

Considérons une série de ∞^r transformations. Si le produit e'' de deux transformations successives e et e' appartient encore à la série, on dit que celle-ci est un *groupe*.

Le groupe est *continu*, si chaque transformation est infiniment voisine de certaines autres et si le groupe ne se divise pas en séries discrètes.

Le groupe est *fini*, si la détermination d'une transfor-

mation dans le groupe dépend d'un nombre fini de paramètres.

Il ne sera question dans ce qui va suivre que des groupes finis et continus.

La composition de deux transformations dans un groupe de transformations est représentée par r relations de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} e''_1 = \varphi_1(e_1, e_2, \ldots, e_r; e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \\ e''_2 = \varphi_2(e_1, e_2, \ldots, e_r; e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e''_r = \varphi_r(e_1, e_2, \ldots, e_r; e'_1, e'_2, \ldots, e'_r), \end{cases}$$

dont nous représentons l'ensemble par

$$(2)\qquad e'' = \varphi(e, e').$$

Un exemple de groupe de transformations est fourni par l'ensemble des mouvements euclidiens (mouvements sans déformation). En effet, la succession de deux de ces mouvements peut être réalisée par un seul mouvement.

Les équations (2) représentent une opération sur e et e' donnant pour résultat e''.

Cette opération, se confondant avec la multiplication des transformations, admet la loi associative, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi[\varphi(e, e'), e''] = \varphi[e, \varphi(e', e'')].$$

Réciproquement, la condition précédente exprime que les équations (2) sont celles d'un groupe où les variables sont e et les paramètres e'.

En effet, la transformation résultant de l'application successive des deux transformations

$$x' = \varphi(x, e') \qquad \text{et} \qquad x'' = \varphi(x', e'')$$

est

$$x'' = \varphi[\varphi(x, e'), e'']$$

ou

$$x'' = \varphi[x, \varphi(e', e'')].$$

La condition est donc suffisante pour que les équations (2) soient les équations de composition d'un groupe.

IV. — Sous-groupes.

Si, dans un groupe, ∞^m transformations forment entre elles un groupe, celui-ci est dit un *sous-groupe* du premier.

Le groupe euclidien comprend notamment les sous-groupes suivants :

Rotations autour d'un point donné (∞^3 transformations);

Translations (∞^3 transformations);

Rotations autour d'un axe (∞^1 transformations).

V. — Famille de variétés.

Considérons les m équations

$$u_1(x) = \text{const.}, \quad u_2(x) = \text{const.}, \quad \ldots, \quad u_m(x) = \text{const.}$$

Elles représentent une *variété* à $n - m$ dimensions.

Si l'on considère les valeurs des m constantes comme des paramètres, ces équations représentent ∞^m variétés, dont l'ensemble s'appelle une *famille*. Comme le nombre des paramètres est égal à celui des équations, chaque variété est déterminée dans la famille par la connaissance d'un des éléments x qu'elle contient.

Les m quantités $u_1, u_2, \ldots, u_m$ peuvent être considérées comme les coordonnées de la variété. Ces coordonnées sont évidemment en nombre inférieur à n, puisque $n - m$ est le nombre des dimensions de la variété.

En Géométrie, une famille de surfaces comprend ∞^1 surfaces; une famille de lignes comprend ∞^2 lignes. Une famille de lignes s'appelle aussi *congruence*.

Les sphères concentriques forment une famille de surfaces. Il en est de même des quadriques confocales.

VI. — Transivité. Invariants.

On appelle *transitif* un groupe comprenant des transformations susceptibles de faire correspondre à un élément quelconque un élément arbitrairement choisi.

Tel est, en Géométrie, le groupe des translations. Ce groupe sera dit *simplement* transitif, parce qu'il n'existe qu'une translation transformant un point en un autre.

Tout groupe *intransitif*, c'est-à-dire ne possédant pas la propriété qui vient d'être indiquée, présente des *invariants*, c'est-à-dire des fonctions de variables dont la valeur ne change pas quand on applique à ces variables les transformations du groupe.

Soit $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$, m invariants indépendants les uns des autres.

Lorsqu'on applique à l'élément x_0 les transformations du groupe, cet élément reste sur la variété représentée par les m équations

$$u_1(x) = u_1(x_0), \qquad u_2(x) = u_2(x_0), \qquad \ldots, \\ u_m(x) = u_m(x_0).$$

On peut donc dire qu'*un groupe intransitif laisse invariantes des variétés formant une famille.*

Un exemple de groupe intransitif est donné par les rotations autour d'un point. Chaque point de l'espace se déplace en restant sur une sphère ayant pour centre le point fixe. En prenant ce point pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires, la famille des

surfaces invariantes a pour équation

$$x^2+y^2+z^2 = \text{const.}$$

Le groupe ne présente qu'un invariant : $x^2+y^2+z^2$.

Le groupe des rotations autour d'une droite est également intransitif. Il présente deux invariants qui sont, en prenant l'axe de rotation pour axe des z, $x^2+y^2+z^2$ et z. La famille des variétés invariantes se compose des circonférences parallèles au plan des xy.

Il ne suffit pas, pour qu'un groupe soit transitif, que le nombre de ses paramètres soit égal ou supérieur à celui de ses variables.

C'est ainsi que le groupe des rotations autour d'un point a trois paramètres et est pourtant intransitif.

VII. — Primitivité. Covariants.

On appelle *imprimitif* un groupe conservant une famille de variétés, c'est-à-dire transformant ces variétés l'une dans l'autre.

Soit

$$u_1(x) = \text{const.}, \quad u_2(x) = \text{const.}, \quad \ldots \quad u_m(x) = \text{const.}$$

les équations de la famille invariante.

On aura, par hypothèse,

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1(x') = F_1[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)], \\ u_2(x') = F_2[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m(x') = F_m[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)] \end{cases}$$

ou

$$(3) \qquad u' = F(u).$$

Ainsi, tandis qu'un groupe intransitif conserve *chaque* variété d'une famille, un groupe imprimitif

conserve *l'ensemble* des variétés d'une famille. Un groupe intransitif est donc à plus forte raison imprimitif.

Nous dirons qu'*un groupe intransitif admet une famille de variétés invariantes* et qu'*un groupe imprimitif admet une famille de variétés covariantes*.

On obtient, par exemple, un groupe imprimitif en adjoignant aux rotations autour d'un point les homothéties par rapport à ce point. Les sphères ayant le point fixe pour centre ne sont plus alors invariantes, mais seulement covariantes. On a, en effet, en désignant par K le coefficient d'homothétie,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = K^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ce groupe conserve aussi la famille des droites issues du point fixe, c'est-à-dire que ces droites sont aussi covariantes.

VIII. — Invariants et covariants simultanés.

L'ensemble de deux éléments à n variables peut être considéré comme un élément à $2n$ variables, et en appliquant les transformations d'un groupe G à chacun des deux éléments, on obtient un groupe à $2n$ variables.

On trouvera généralement ainsi des invariants et des covariants qui ne se présentaient pas quand on ne considérait qu'un seul élément.

C'est ainsi qu'un point n'admet, par rapport au groupe euclidien, ni invariant, ni covariant, tandis que deux points présentent par rapport à ce groupe un invariant, qui est leur distance, et un covariant, qui est la droite qui les joint.

Trois points présentent, en plus, un covariant : le plan qu'ils déterminent.

En prenant un nombre suffisant d'éléments, on arrive forcément à un ensemble qui acquiert par le groupe ∞^r positions différentes. A partir de ce moment, l'adjonction d'un nouvel élément ne peut rien donner de nouveau, puisque sa position sera déterminée par la connaissance de la position des autres éléments.

C'est ainsi que, par rapport au groupe euclidien, pour avoir tous les invariants et covariants indépendants, il suffit de considérer trois points. Si l'on fixe, en effet, leurs positions, aucun mouvement n'est possible, car on a épuisé la transitivité du groupe. En effet, un point peut acquérir ∞^3 positions; une fois celle-ci fixée, un second point peut acquérir ∞^2 positions sur une sphère ayant le premier point pour centre. Enfin la position de ce second point étant fixée, un troisième ne pourra plus que tourner autour de la droite déterminée par les deux premiers. L'ensemble des trois points pourra donc acquérir ∞^6 positions. Le nombre de paramètres du groupe étant six, la transitivité est épuisée.

Pour tout groupe à r paramètres, r est une limite supérieure du nombre des éléments à considérer pour obtenir tous les invariants et covariants simultanés indépendants.

Pour que cette proposition soit prouvée, il suffit de démontrer que les ∞^r transformations du groupe donnent toujours à cet ensemble de r éléments ∞^r positions différentes.

En effet, un élément *quelconque* peut acquérir au moins ∞^1 positions différentes, soit ∞^p, et il existe alors ∞^{r-p} transformations qui donnent à l'élément une même position. Ces ∞^{r-p} transformations donneront à un second élément *quelconque* (si $r - p > 0$) au moins ∞^1 positions, de sorte que l'ensemble de deux éléments

pourra acquérir au moins ∞^2 positions. D'une façon générale, *un ensemble de m points, m étant inférieur à r, peut acquérir au moins ∞^m et au plus ∞^r positions.*

Un ensemble de r éléments acquiert donc sûrement ∞^r positions.

IX. — Isomorphisme.

Les équations (3) expriment la manière dont sont transformées l'une dans l'autre les variétés covariantes u, lorsqu'on applique à l'élément x une transformation du groupe G.

Chaque transformation du groupe G détermine une des transformations (3), et ces dernières forment évidemment un nouveau groupe g, dans lequel les variables sont $u_1, u_2, \ldots, u_m$ $(m < n)$.

Mais deux transformations du groupe G peuvent ne pas donner lieu à des transformations du groupe g différentes entre elles, de sorte que g peut présenter un nombre de paramètres essentiels inférieur à celui de G.

Supposons, en effet, que ρ^5 transformations de G conservent chacune des variétés u. A chacune de ces transformations Σ correspondra, dans le groupe g, la transformation identique.

Par exemple, le groupe des similitudes [1] autour d'un point admet comme covariant la droite qui joint le point variable au point fixe. Chacune de ces droites reste invariante par les transformations homothétiques, de sorte que les points de l'espace sont transformés par un groupe à quatre paramètres essentiels, et les droites

---

[1] Nous appelons *similitude* une transformation composée d'une homothétie et d'une rotation autour du centre d'homothétie. Les similitudes forment un groupe à sept paramètres, qui comprend, comme sous-groupe, le groupe euclidien.

en question par un groupe à trois paramètres essentiels.

Si S est une transformation du groupe G ne laissant pas invariantes les variétés u, les ρ^3 transformations de la forme ΣS donneront lieu à la même transformation du groupe g. Le nombre des paramètres essentiels du groupe g est $r - 3$. De plus les ρ^3 transformations forment un groupe, c'est-à-dire un sous-groupe de G.

Il est évident que l'on peut utiliser pour le groupe g les paramètres e et les équations de composition (3) du groupe G, en tenant compte toutefois de ce que ces paramètres peuvent ne pas être essentiels.

Le groupe g est dit *isomorphe* au groupe G.

D'une manière générale, *lorsque à toute transformation e d'un groupe G à r paramètres essentiels correspond une transformation η_1 (fût-ce la transformation identique) d'un groupe g possédant un nombre égal ou inférieur de paramètres essentiels, de manière qu'au produit de deux transformations du premier groupe corresponde le produit des deux transformations correspondantes du second, celui ci est dit isomorphe au premier.* L'isomorphisme sera dit *holoédrique*, lorsque le nombre des paramètres essentiels sera le même, et *mériédrique* dans le cas contraire.

L'isomorphisme holoédrique est une propriété réciproque, de sorte que l'on peut parler de deux groupes isomorphes holoédriques. Il n'en est pas de même de l'isomorphisme mériédrique. On dit dans ce cas que le groupe qui a le plus petit nombre de paramètres est isomorphe mériédrique à l'autre groupe.

Deux groupes isomorphes holoédriques peuvent être amenés par un changement de paramètres à avoir les mêmes équations de composition. En effet, par définition, à toute transformation η_1 du second correspond une transformation e du premier de la manière indi-

quée, et cette correspondance, que l'on peut représenter par r relations

$$e = \Psi(\eta),$$

permet de donner au second groupe les mêmes paramètres qu'au premier.

Si l'isomorphisme était mériédrique, on pourrait bien exprimer les η en fonction des e, mais on ne pourrait pas faire l'inverse.

Il est évident que, dans deux groupes isomorphes, les sous-groupes se correspondent.

Nous citerons, comme exemple d'isomorphisme holoédrique, le cas des trois groupes géométriques suivants :

Groupe projectif sur la droite;
Groupe linéaire homogène spécial dans le plan ;
Groupe des rotations autour d'un point dans l'espace.

On dit aussi que deux groupes isomorphes holoédriques ont la même *structure*.

Pour nous, les équations de composition seront la caractéristique de la structure, en ne considérant pas comme différentes les structures résultant de systèmes d'équations susceptibles de se transformer l'un dans l'autre par un changement de paramètres.

X. — Similitude.

Un cas important d'isomorphisme holoédrique est celui de la *similitude*.

Deux groupes ayant le même nombre de variables et le même nombre de paramètres sont *semblables*, quand ils peuvent se transformer l'un dans l'autre par un changement de paramètres et un changement de variables.

Deux groupes semblables sont donc isomorphes holoédriques. Mais cette condition ne suffit pas.

Soient G et G′ deux groupes isomorphes holoédriques ayant le même nombre n de variables.

Soit m le nombre des invariants indépendants dans G, m pouvant être nul. Un élément x_0 peut prendre ∞^{n-m} positions différentes, c'est-à-dire qu'il existe $\infty^{r-(n-m)}$ transformations transformant l'élément x_0 en un élément donné, et, en particulier, en lui-même, ou, d'une manière plus précise, qu'on peut écrire, entre les paramètres e du groupe, $n - m$ relations exprimant la condition pour que la transformation e laisse invariant l'élément x_0. Ces relations contiennent évidemment les coordonnées de l'élément x_0.

Ces $\infty^{r-(n-m)}$ transformations Σ forment évidemment un groupe, qui est un sous-groupe de G. A ce sous-groupe correspond dans G′ un sous-groupe composé d'un même nombre de transformations Σ'.

Supposons maintenant que les deux groupes G et G′ soient semblables, et soit y_0 l'élément correspondant à x_0. Les transformations Σ' conservent, dans ce cas, y_0. Il est donc nécessaire qu'au sous-groupe de G conservant l'élément x_0 corresponde dans G′ un sous-groupe conservant un élément y_0.

Je dis que cette condition est suffisante pour que G et G′ soient semblables.

En effet, si S est une des transformations de G amenant l'élément x_0 en x, toutes les transformations réalisant cette condition sont de la forme $S\Sigma$. Si S′ est la transformation de G′ correspondante à S, $S'\Sigma'$ est la forme générale des transformations de G transformant l'élément y_0 en un certain élément y. On établit ainsi une correspondance entre les éléments x et les éléments y, correspondance qui peut être exprimée par

n relations $y = \Psi(x)$, par lesquelles le groupe G′ s'identifiera au groupe G.

Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes holoédriques isomorphes à un même nombre de variables soient semblables est qu'au sous-groupe de l'un conservant un élément corresponde un sous-groupe de l'autre conservant aussi un élément.*

Moyennant cette condition, parmi les correspondances en nombre généralement infini que l'on peut établir entre les transformations de deux groupes isomorphes, il en existera au moins une permettant d'établir entre les éléments une correspondance ayant les propriétés indiquées.

Il résulte de tout cela que deux groupes holoédriques isomorphes à un même nombre de variables sont toujours semblables, s'ils sont simplement transitifs. Dans ce cas, la seule transformation laissant invariant un élément de position *quelconque* est la transformation identique.

Dans ce cas à un élément x d'un des groupes on peut faire correspondre un élément y arbitrairement choisi dans l'autre. Ensuite à tout élément $S(x)$ correspondra l'élément $S'(y)$, S′ étant la transformation correspondante à S.

Soit

$$y = \Psi(x)$$

un changement de variables identifiant les deux groupes, c'est-à-dire transformant chaque transformation S′ en sa correspondante S. On a alors, d'après ce qui précède,

$$S'(y) = \Psi S(x),$$

d'où

$$S'\Psi(x) = \Psi S(x).$$

La transformation Ψ satisfait donc à la condition

$$S'\Psi = \Psi S.$$

Il est facile de voir que toute transformation Ψ satisfaisant à cette condition identifie le groupe en y au groupe en x.

Cherchons pour les transformations Ψ un critérium plus précis.

Les $2r$ équations

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = S(x), \\ y' = S'(y) \end{cases}$$

représentent une transformation à $2r$ variables.

Supposons qu'on ait opéré un changement de paramètres convenable de manière que S et S' aient les mêmes paramètres. Les transformations formées, comme (4), de deux transformations correspondantes, forment un groupe. Car le produit de deux de ces transformations (S, S') et (S_1, S'_1) sera formé des deux transformations $S_1 S$ et $S'_1 S'$, qui se correspondent par définition de l'isomorphisme.

Ce groupe à $2r$ variables et à r paramètres présente r invariants

$$W_1(xy), \qquad W_2(xy), \qquad \ldots, \qquad W_r(xy).$$

Égalons ces invariants à des constantes, et résolvons par rapport aux r variables y les r équations ainsi obtenues. On obtiendra ainsi une transformation

$$y = \Psi(x),$$

dont la propriété caractéristique sera de rester invariante par la transformation (4), c'est-à-dire que l'on aura

$$S'(y) = \Psi S(x),$$

et par suite

$$S'\Psi = \Psi S.$$

Les transformations Ψ ainsi obtenues sont donc celles qui identifient les deux groupes.

Elles dépendent de r constantes arbitraires que nous pouvons écrire

$$W_1(x_0, y_0), \quad W_2(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad W_r(x_0, y_0).$$

Nous pouvons nous donner x_0 et donner à y_0 toutes les positions possibles, soit ∞^r, et nous retrouvons ainsi une propriété déjà énoncée.

XI. — Groupes paramétraux.

Dans les équations de composition d'un groupe

$$(2) \qquad e'' = \varphi(e, e'),$$

considérons les e comme variables et les e' comme paramètres. Les équations (2) sont celles d'un groupe simplement transitif à r paramètres, qui est dit *groupe paramétral* du groupe considéré.

En désignant par x la transformation variable, par x' la transformée et par a la transformation qui sert de paramètre, les équations du groupe peuvent être représentées par

$$x' = ax.$$

Ce groupe est évidemment isomorphe à tous les groupes par rapport auxquels il joue le rôle de groupe paramétral.

Il existe un second groupe paramétral jouissant des mêmes propriétés que le premier :

$$y' = yb.$$

Les deux groupes paramétraux sont isomorphes. Faisons, en effet, correspondre à chaque transformation a du premier la transformation b du second déterminée par

$$b = a^{-1}.$$

Aux deux transformations du premier groupe

$$x' = ax, \qquad x' = a'x,$$

correspondent, dans le second groupe,

$$y' = ya^{-1}, \qquad y' = ya'^{-1}.$$

Le produit des deux premières est la transformation

$$x' = (a'a)x.$$

Le produit des deux secondes est

$$y' = y(a^{-1}a'^{-1}),$$

ou

$$y' = y(a'a)^{-1}.$$

C'est bien la transformation correspondant à $a'a$.

Les deux groupes étant tous les deux simplement transitifs sont semblables.

Pour les transformer l'un dans l'autre, il suffit d'opérer les changements de variables et de paramètres suivants :

$$y = x^{-1}, \qquad b = a^{-1}.$$

Ce que nous venons d'exposer suppose que le groupe considéré comprend les inverses de toutes ses transformations.

Nous ne nous occuperons pas des groupes ne présentant pas cette propriété. Un de ces groupes, par exemple, est le groupe à une variable et à un paramètre qui a pour équation

$$x' = ax,$$

avec la condition $a > 1$.

Chacun des groupes paramétraux est évidemment simplement transitif.

Réciproquement, tout groupe simplement transitif peut, par un simple changement de variables, être mis

sous la forme d'un groupe paramétral. Un groupe simplement transitif est, en effet, semblable (X) à son groupe paramétral, auquel il est isomorphe.

Appliquons les deux groupes paramétraux au même système de variables z, c'est-à-dire prenons les équations des deux groupes sous la forme

$$z' = az \qquad \text{et} \qquad z' = zb.$$

En appliquant successivement ces deux transformations, on obtient, quel que soit l'ordre adopté, la transformation suivante

$$z' = azb.$$

Les deux transformations sont donc commutatives, c'est-à-dire (I) que chacune d'elles admet l'autre.

Réciproquement, on démontre qu'une transformation commutative à toutes les transformations de l'un des groupes fait partie de l'autre.

D'une façon générale, *les transformations commutatives à toutes celles d'un groupe simplement transitif forment également un groupe simplement transitif.*

La relation entre les deux groupes étant réciproque, on qualifie ces deux groupes de *réciproques*.

Dans un groupe simplement transitif G, un sous-groupe g à m paramètres, c'est-à-dire composé de ∞^m transformations, donne à l'élément variable ∞^m positions différentes et, par suite, laisse invariantes ∞^{n-m} variétés à m dimensions.

Il résulte de ce que chaque transformation d'un groupe simplement transitif admet le groupe simplement transitif réciproque, que les variétés invariantes par rapport à un sous-groupe g de l'un G sont transformées l'une dans l'autre par le groupe réciproque G', et réciproquement un covariant de l'un caractérise une famille de variétés invariantes par rapport à un sous-groupe de l'autre.

On a donc la proposition :

Étant donnés deux groupes G et G′ simplement transitifs réciproques, les sous-groupes de l'un et les covariants de l'autre se correspondent.

XII. — Groupes de structure donnée.

Pour connaître tous les groupes semblables entre eux, il suffit d'en connaître un, car tous les autres seront obtenus par des changements de variables et de paramètres.

Il est facile de voir qu'un groupe intransitif peut toujours être obtenu au moyen d'un groupe transitif isomorphe, en adjoignant aux équations de ce dernier un certain nombre d'autres équations formées de variables égalées à des constantes, et en opérant ensuite un changement de variables. Les variables égalées à des constantes seront les invariants du groupe intransitif.

Les groupes intransitifs sont donc déterminés quand on connaît les groupes transitifs de même structure.

Je dis que *tout groupe transitif est semblable à un groupe transformant un covariant du groupe paramétral.*

Soit G un groupe transitif à n variables et à r paramètres.

Nous avons vu (VIII) qu'il existe un nombre $p < r$ tel qu'un ensemble de p éléments x prend par le groupe ∞^r positions différentes.

On peut représenter les ∞^r transformations de G par les ∞^r positions d'un de ces ensembles. Ces ∞^r positions forment une variété à r dimensions dans la variété à np dimensions qui comprend la totalité des ensembles de p éléments.

Ces ∞^r positions sont transformées par un groupe Γ simplement transitif, isomorphe holoédrique à G et semblable aux groupes paramétraux de G, et chaque groupe relatif à un covariant de Γ sera semblable à un groupe dérivant d'une manière analogue de chaque groupe paramétral et réciproquement.

Nous pouvons choisir pour les variables du groupe Γ un système comprenant les coordonnées x de l'élément de G. Ces coordonnées caractérisent une variété, savoir celle qui est formée par les ensembles comprenant l'élément x.

Cette variété est covariante dans le groupe Γ, de sorte que le groupe par lequel elle est transformée, c'est-à-dire le groupe G, doit être semblable à un groupe relatif à un covariant de chacun des groupes paramétraux de G.

En résumé, *tous les groupes de structure donnée seront déterminés, si l'on connaît tous les groupes transitifs, et l'on obtiendra ceux-ci en recherchant les covariants d'un des groupes paramétraux. Enfin* (XI), *chacun de ces covariants est déterminé par un sous-groupe du groupe paramétral réciproque.*

Remarquons que cette marche peut donner lieu à des groupes isomorphes mériédriques aux groupes cherchés.

XIII. — Groupe adjoint. Transformations distinguées.

Les propriétés suivantes ne dépendent que de la structure.

On pourra donc faire abstraction des éléments auxquels s'appliquent les groupes et, par suite, identifier les groupes isomorphes holoédriques.

Nous savons (I) que STS^{-1} représente la transformation en laquelle est transformée T par l'effet de S.

Si S et T appartiennent à un groupe G à r paramètres, la transformation précédente fera aussi partie du groupe, de sorte que l'équation

$$T' = STS^{-1}$$

représentera une transformation à r variables, qui seront les paramètres de T.

Ces transformations forment un groupe isomorphe à G. Cela résulte de l'identité

$$S'STSS'^{-1} \equiv S'ST(S'S)^{-1}.$$

Ce groupe s'appelle le *groupe adjoint* à G.

On appelle transformations *distinguées* du groupe G les transformations commutatives avec toutes celles du groupe. Les transformations distinguées forment elles-mêmes un groupe, car le produit de deux transformations distinguées présente évidemment la même propriété.

A chaque transformation distinguée du groupe G correspond dans le groupe adjoint la transformation identique, de sorte que, si ∞^ρ est le nombre des transformations distinguées, le groupe adjoint a seulement $\infty^{r-\rho}$ paramètres essentiels.

XIV. — Types de sous-groupes.

Une transformation du groupe adjoint transforme un sous-groupe en un autre sous-groupe. Cela résulte de l'identité

$$STS^{-1}ST'S^{-1} \equiv STT'S^{-1}.$$

Le groupe adjoint transforme, en général, un sous-groupe en une infinité de sous-groupes.

Ces sous-groupes sont dits du même *type*.

Les sous-groupes conservés par le groupe adjoint sont dits *groupes invariants*. Un sous-groupe invariant est donc, par définition, le seul de son type.

On peut considérer une transformation comme un cas particulier de sous-groupe et appeler du même type les transformations que le groupe adjoint transforme les unes dans les autres.

Les transformations d'un même type forment, d'après la définition même, une variété invariante par rapport au groupe adjoint.

Nous ferons l'application de cette terminologie au groupe des similitudes, dont il a déjà été question (IX).

Une transformation de ce groupe conserve un point de l'espace à distance finie ou infinie et une droite passant par ce point. Elle est déterminée par la connaissance du point fixe, de la direction de la droite fixe, du coefficient d'homothétie et de l'angle de rotation.

Le groupe ne comprend pas de transformations distinguées; aussi le groupe adjoint a-t-il le même nombre de paramètres que le groupe lui-même, c'est-à-dire lui est isomorphe holoédrique.

Le coefficient d'homothétie et l'angle de rotation sont des invariants du groupe adjoint. Le point et la direction fixes en sont des covariants.

Le centre de similitude considéré comme covariant relatif au groupe adjoint est transformé par un groupe à sept paramètres, qui n'est autre que le groupe de similitude lui-même.

La direction fixe est transformée par un groupe qui n'a que trois paramètres essentiels.

Les sous-groupes invariants sont le groupe euclidien et le groupe des homothéties, qui ont en commun les translations.

Les invariants du groupe adjoint déterminent les types de transformations, de sorte que les transformations d'un même type sont celles qui ont le même coefficient d'homothétie et le même angle de rotation.

Citons les sous-groupes suivants :

Similitudes concentriques;

Similitudes coaxiales;

Homothéties concentriques;

Rotations coaxiales;

Etc.

[M²91]

NOTE SUR UNE SURFACE ÉTUDIÉE PAR PAINVIN;

Par M. O. BÖKLEN.

Painvin a examiné le premier (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 481) le lieu des foyers des sections centrales d'une surface du second ordre. On peut construire cette surface, qui est du huitième degré, de la manière suivante :

Il y a une infinité d'ellipsoïdes qui ont même section centrale (ou qui passent par la même ellipse) et dont la longueur du grand axe est constante ; les foyers des petits axes de ces ellipsoïdes sont situés sur la surface de Painvin.

On peut ajouter : *Les deux foyers du grand axe de ces ellipsoïdes sont situés sur une surface de l'onde.*

Si $a > \mu > \nu$ sont les demi-axes d'un tel ellipsoïde avec le centre O, et que F_1 et F_2 soient les foyers du

grand axe et F_3 celui du petit axe, on a

$$OF_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2}, \quad OF_2 = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \quad OF_3 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2};$$

le dernier foyer est donc imaginaire, mais on détermine sa place sur le petit axe comme s'il était réel.

La démonstration de ces deux propositions est fondée sur un théorème de Chasles et en est une conséquence immédiate (*Aperçu historique*, 1837, Notes XXV et XXXI^b).

Étant donnés un ellipsoïde (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et un point quelconque M de (E), on construit un second ellipsoïde (E′) sur les normales de (E) et des deux surfaces homofocales (μ) et (ν) qui se coupent au point M; a, μ, ν sont les demi-axes de (E′). Ce second ellipsoïde touche le plan (yz) à l'origine O, et sa section centrale, menée par le point M et parallèle au plan (yz), est une ellipse (e) avec les axes $\sqrt{a^2 - b^2}$ et $\sqrt{a^2 - c^2}$, parallèles aux axes des coordonnées y et z.

Cela posé, transportons l'ellipsoïde (E′) de manière que son centre parcoure la droite MO et que ses axes restent toujours parallèles à eux-mêmes. Dans cette nouvelle situation, l'ellipse (E) viendra dans le plan (yz), et son équation est

$$(1) \qquad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

A chaque point M sur (E) correspond un autre ellipsoïde (E′) qui peut être transporté au point O de la même manière et passera par la même ellipse (e), qui est la section centrale commune à tous les ellipsoïdes transportés. Leurs foyers sont F_1, F_2, F_3, auxquels correspondent les valeurs

$$(2) \qquad OF_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2}, \quad OF_2 = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \quad OF_3 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}$$

Menons par le point O un plan P parallèle au plan tangent de (E) au point M. Ce plan coupe (E) dans une ellipse dont les demi-axes soient OA > OB; ils sont parallèles aux tangentes des deux lignes de courbure qui se croisent au point M, et leurs valeurs sont :

$$(3) \qquad OA = \sqrt{a^2 - \nu^2}, \qquad OB = \sqrt{a^2 - \mu^2};$$

d'où

$$OF_0 = \sqrt{\mu^2 - \nu^2},$$

F_0 est le foyer réel de cette ellipse et, par suite, un point de la surface de Painvin appartenant à la section centrale de (E) qui correspond au plan P.

Mais, d'après l'équation (2), on a $OF_3 = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}$, c'est-à-dire le foyer imaginaire F_3 de l'ellipse aux axes μ et ν coïncide avec le foyer réel F_0; cette ellipse est la section principale de (E′), qui contient l'axe moyen 2μ et le petit axe 2ν. Il résulte alors de ce qui précède que son foyer imaginaire F_3, situé sur le petit axe 2ν, appartient à la surface de Painvin.

D'après les équations (2) et (3), on a

$$(4) \qquad OA = OF_2, \qquad OB = OF_1:$$

les foyers F_1 et F_2 sont donc situés sur la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^9} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Cette seconde partie de ma proposition a été déjà publiée dans ma *Dissertation sur la surface de l'onde* (Reutlingen, 1881), que M. Cornu a bien voulu citer dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, T. I, p. 10; je l'ajoute à cause de son rapport intime avec la première Partie.

[O2b]

LES COURBES IMAGES ET LES COURBES SYMÉTRIQUES;

Par M. G. de Longchamps.

1. Le Volume des *Sitzungsberichte der Königel Bohmischen* pour l'année 1898 contient une Note de M. Michel Petrovitch intitulée : *Sur un système de coordonnées semi-curvilignes*, dans laquelle il préconise, pour certaines recherches, le système suivant [1] :

Soit C une première courbe donnée. Sur C, on prend un point A comme origine. En un point M, mobile sur C, on trace la normale et, sur cette normale, à partir de M, on prend un point B, tel que $MB = n$ ait une relation déterminée avec l'arc $AM = \sigma$. Le lieu de B est une courbe C', que M. Petrovitch appelle l'*image* [2] *de* C.

On peut porter la longueur n, sur la normale, en deux sens. On obtient ainsi deux courbes C', C'', associées à C, comme il vient d'être dit. Ces deux courbes C', C'' sont dites *courbes symétriques* relativement à C.

Le tracé des tangentes à ces courbes peut se faire très simplement, comme nous allons l'indiquer; nous trouverons ici une application nouvelle du principe dont nous avons, à plusieurs reprises, montré la fécondité : le principe des transversales réciproques.

---

(1) L'idée générale à laquelle est empruntée l'idée particulière que nous allons indiquer se trouve exposée, comme l'on sait, dans l'Ouvrage de l'abbé Aoust.

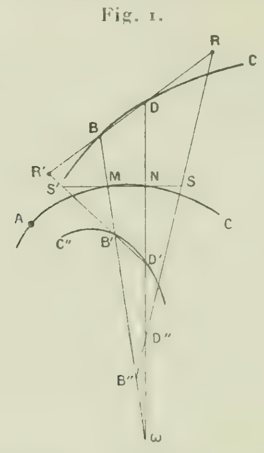
(2) Si notre mémoire est fidèle, ce mot a été pris déjà et dans un autre sens.

2. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on sait construire les tangentes à l'une des courbes C′, C″, on saura tracer la tangente à la courbe symétrique.*

Soit C la courbe proposée ; sur C, prenons deux points infiniment voisins M, N ; puis, ayant tracé les normales

Fig. 1.



en ces points, prenons MB = MB′, ND = ND′, les longueurs MB, ND étant calculées conformément à la condition imposée à l'arc AM = σ compté, sur C, à partir de A et à la longueur n de la normale MB.

Les normales MB, ND se coupent en un point ω qui est, à la limite, le centre de courbure de C, au point M.

Prenons $\omega B'' = MB$, $\omega D'' = ND$. Dans le triangle ωBD, les droites MN, B″D″ sont deux transversales réciproques; elles coupent BD en deux points isotomiques R, R′ (¹).

D'autre part, dans le triangle ωMN, B″D″ et B′D′ sont, aussi, deux transversales réciproques ; elles coupent MN en deux points isotomiques S, S′.

(¹) La figure est légèrement inexacte.

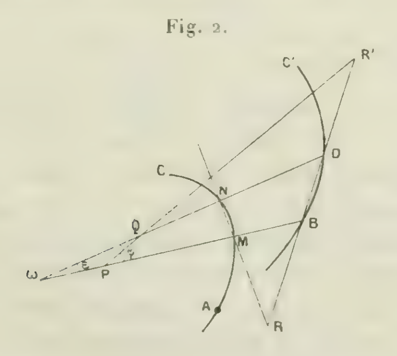
Si nous passons à la limite, il est facile de voir que la connaissance de la tangente en B entraîne celle de la tangente en B', et réciproquement.

Supposons connue la tangente en B à la courbe C'; alors on connaît la position limite r' du point R', point de rencontre de la tangente en B, à C', avec la tangente en M, à C. Le point R a pour position limite un point r, symétrique de r' par rapport à B. Ainsi B''D'' a une position limite déterminée par le point r et par B''. On connaîtra donc le point s, position limite de S, et, par suite, celle de s', position limite du point S'. Finalement, on connaîtra la position limite de S'B'; la tangente en B' se trouvera ainsi construite.

Réciproquement, la connaissance de la tangente en B' à la courbe C'' entraîne celle de la tangente en B à la courbe C'. On connaîtra, en effet, la limite du point S'; par suite, celle de S. Les deux droites B'D', B''D'' ayant des positions limites bien définies, il restera à mener par B une droite partagée en deux parties égales par le point et par les droites en question.

3. Cela posé, considérons une courbe C et l'une de

Fig. 2.



ses images, au sens attribué tout à l'heure à ce mot, la courbe C'.

Sur les normales infiniment voisines $M\omega$, $N\omega$ prenons

$$\omega P = MB, \qquad \omega Q = ND.$$

En posant

$$AM = s, \qquad BM = n, \qquad Q\omega P = \varepsilon, \qquad QPB = \varphi,$$

avec la condition

$$n = f(s),$$

le triangle ωPQ donne

$$\frac{\omega P}{\sin(\varphi - \varepsilon)} = \frac{\omega Q}{\sin\varphi} = \frac{\omega Q - \omega P}{\sin\varphi - \sin(\varphi - \varepsilon)},$$

ou

$$\frac{f(s)}{\sin(\varphi - \varepsilon)} = \frac{f(s + ds)}{\sin\varphi} = \frac{\dfrac{f(s+ds) - f(s)}{ds}\,\dfrac{ds}{\varepsilon}}{\dfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\cos\left(\varphi - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

En passant à la limite, ρ désignant le rayon de courbure en M à la courbe C, on a

$$\frac{f(s)}{\sin\varphi} = \frac{\rho\,\dfrac{df}{ds}}{\cos\varphi}$$

ou, enfin,

$$\operatorname{cotang}\varphi = \rho\,\frac{f'(s)}{f(s)}.$$

Cette formule permet de résoudre, dans tous les cas, le problème des tangentes pour la courbe C′. Elle permet, en effet, de construire l'angle φ que fait, avec la normale ωM, la limite de PQ. Or PQ, MN sont deux transversales réciproques du triangle ωBD; la tangente à C′, en B, limite de BD, s'obtiendra donc en menant, par B, une droite partagée en deux parties égales par la tangente en M à la courbe C et par la droite qui, passant

par P, fait avec ωM, dans un sens déterminé, un angle φ correspondant à la formule que nous avons établie.

4. Supposons, pour indiquer une application simple, que l'on prenne, à chaque instant, MB = arc AM. L'équation de C', dans le système proposé, est $s = n$, et l'on a

$$\operatorname{cotang} \varphi = \frac{\rho}{n}.$$

Élevons ωI perpendiculaire à ωM et prenons ωI = MB, ω étant le centre de courbure, en M, à la courbe C. Alors l'angle ωMI est égal à φ (1). Il reste,

Fig. 3.

pour avoir la tangente, en B, à l'image de C, à mener par B une droite partagée en deux parties égales par IM et par la tangente en M à C. On construit le parallélogramme BαMγ, comme l'indique la figure; la tangente en B, à l'image de C, est la droite Δ, menée par B, parallèle à $\alpha\gamma$.

Dans le cas particulier où la courbe C que l'on transforme est une circonférence, l'image C', en supposant S = n, a pour équation polaire

$$\rho = R + R\omega.$$

(1) Les points K, β sont confondus avec M; la figure est inexacte.

C'est une conchoïde par rapport à la spirale d'Archimède, etc.

Mais nous n'insisterons pas sur les exemples divers que l'on peut rattacher au cas général que nous avons examiné ici; notre intention était simplement d'appeler l'attention sur un système de coordonnées qui paraît, par la lecture du Mémoire de M. Petrovitch, Mémoire auquel nous renvoyons le lecteur pour plus de détails, appelé à quelques applications intéressantes.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1899.

Mathématiques élémentaires.

1° On considère les coniques ayant une directrice fixe D et passant par deux points fixes A et B. Deux de ces coniques passent par un point donné M et se coupent en un nouveau point M' qui est dit *associé* au point M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a. De déterminer les points M tels que les points M' associés soient indéterminés;

b. De trouver le lieu des points M tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.

2° Montrer que si le point M décrit une droite quelconque Δ, le point associé M' décrit en général une hyperbole Γ dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite Δ qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.

3° On suppose que la droite Δ est placée de telle sorte que la conique Γ devienne une parabole et l'on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque Δ se déplace en satisfaisant à cette condition.

4° On suppose que la droite Δ se déplace de telle sorte que les hyperboles Γ correspondantes aient une asymptote com-

mune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique Γ.

Mathématiques spéciales.

On considère tous les paraboloïdes ayant les mêmes focales qu'un paraboloïde P dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0.$$

On mène à ces paraboloïdes des normales parallèles à un plan Q ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

1° Démontrer que la surface S, lieu des pieds de ces normales, peut être considérée comme engendrée par une parabole variable dont le plan enveloppe un cylindre parabolique C.

2° Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S peuvent être exprimées rationnellement en fonction de deux paramètres ρ, ρ_1 qui fixent la position des plans tangents menés par le point M au cylindre C.

Montrer, à l'aide des expressions ainsi trouvées, que le cylindre C touche la surface S en tous les points d'une cubique.

Montrer, à l'aide des mêmes expressions, que S est une surface réglée du troisième ordre, dont les génératrices rectilignes sont parallèles à celles d'un cône de révolution.

3° La surface S admet une droite double Δ dont on demande les équations.

4° Démontrer que les génératrices rectilignes de la surface S rencontrent, en dehors de la droite double Δ, une autre droite Δ_1 avec laquelle elles font un angle constant. Trouver les équations de cette droite Δ_1.

Remarque. — Parmi les résultats énoncés, quelques-uns peuvent être établis facilement par la Géométrie; on saura gré aux candidats qui ajouteront ce mode de démonstration.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} (x-a)(px+qy-2z)-(z-c)(p-x)=0, \\ (y-b)(px+qy-2z)-(z-c)(q-y)=0. \end{cases}$$

où z désigne une fonction de x et y, p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y.

1° Les quantités a, b, c étant supposées constantes, trouver les intégrales communes aux deux équations (1).

2° On suppose que les quantités a, b, c soient des fonctions données d'un même paramètre λ, c'est-à-dire que le point M dont les coordonnées sont a, b, c décrive une courbe C : dans ces conditions, en éliminant λ entre les deux équations (1), on obtient une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Comment peut-on intégrer cette équation?

3° Démontrer que les courbes caractéristiques de l'équation (2) sont des coniques, et que les développables caractéristiques sont des cônes du second degré; indiquer les principales propriétés de ces systèmes de coniques et de cônes.

4° Soient A un point d'une surface intégrale, B le pôle du plan tangent en A à cette surface par rapport au paraboloïde P ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2z = 0;$$

démontrer que la droite AB rencontre la courbe C.

5° Sur la droite AB on prend un point N, tel que le rapport anharmonique des points A, N et des deux points de rencontre de la droite AB avec le paraboloïde P soit constant; démontrer que le point N décrit une surface intégrale de l'équation (2).

6° La courbe C étant donnée, déterminer les surfaces intégrales telles que les plans des coniques caractéristiques passent par un point fixe; déterminer les surfaces intégrales dont toutes les caractéristiques ont un système de deux droites.

Mécanique rationnelle.

Une sphère homogène pesante, sans élasticité, de rayon ρ et de masse m, repose immobile sur un plan horizontal fixe parfaitement poli.

Un point matériel pesant, de même masse m que la sphère, vient choquer celle-ci, sous une incidence non nulle, avec une vitesse horizontale connue de grandeur et de direction, puis s'incruste dans la sphère, au point où il l'a frappée, de façon à faire corps avec elle.

1° Trouver l'état des vitesses des divers points du système immédiatement après le choc; déterminer la région dans laquelle le projectile doit frapper la sphère :

a. Pour qu'elle quitte le plan après le choc;

b. Pour qu'elle reste en contact avec le plan.

2° Calculer, dans l'un et l'autre cas, la perte de force vive du système.

3° Trouver le mouvement ultérieur du système, dans le cas où la sphère reste en contact avec le plan.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1899 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, une droite (D) $x + a = 0$, un point A($x = -a$, $y = -b$). Sur AO on prend deux points

$$P(x = p, y = q), \qquad P'(x = p', y = q'),$$

tels que $OP.OP' = \overline{OA}^2 = d^2$.

1° Former l'équation du lieu (F) du foyer correspondant à la droite (D) des coniques admettant cette droite pour directrice et passant en outre par les points P ou P'. Construire ce lieu.

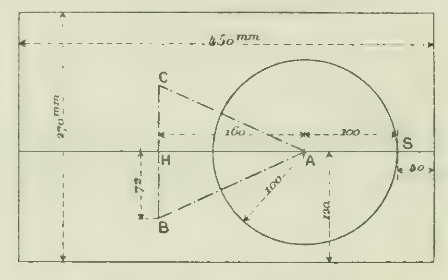
2° Démontrer que, par les points P et P', on peut faire passer deux coniques d'une excentricité donnée, admettant pour directrice la droite (D); et déterminer sur AO les positions des points P et P' par lesquels on peut faire passer deux paraboles réelles, dont on fera la construction pour une position particulière des points P et P'.

3° Pour des positions successives de P sur la droite AO, on distinguera les points du lieu (F) qui sont des foyers d'ellipses, de ceux qui sont des foyers d'hyperboles.

Enfin on étudiera les modifications des résultats précédents en supposant que la droite AO s'applique sur l'axe des x et que le point P' s'éloigne à l'infini, la longueur AO étant constante.

Épure.

Intersection de deux cônes. — On considère trois droites passant par le point S et ayant pour traces sur le plan horizontal les trois points A, B, C. La cote du point S est fixée à 140^{mm} au-dessus du plan horizontal. Les trois points A, B, C



$SA = 100^{mm}$, $AH = 160^{mm}$, $HB = HC = 72^{mm}$;
cote de $S = 140^{mm}$, cote de $\Sigma = 140^{mm}$.

sont les sommets d'un triangle isocèle dont la demi-base $HB = HC = 72^{mm}$ et dont la hauteur $AH = 160^{mm}$. La projection horizontale du point S est située sur la droite HA à 100^{mm} du point A vers la droite de ce point. La droite AH est parallèle aux grands côtés du cadre et à 120^{mm} du côté inférieur.

Cela étant, les trois droites SA, SB, SC sont les génératrices d'un cône de révolution qu'on demande de représenter en projection horizontale par son contour apparent et par sa trace sur le plan horizontal.

On considérera ensuite un deuxième cône de révolution de sommet Σ ayant pour axe la verticale du point A et pour base dans le plan horizontal le cercle de rayon $AS = 100^{mm}$. La cote du sommet Σ de ce deuxième cône est la même que celle du sommet S du premier, soit 140^{mm}.

On déterminera l'intersection des deux cônes et on représentera la projection horizontale du premier limité, comme il a été déjà dit, au plan horizontal, en figurant l'entaille produite par le second.

Cadre de 270^{mm} sur 450^{mm}.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.
Titre intérieur : Intersection de cônes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1768.

(1897, p. 244.)

L'expression

$$\begin{aligned} A = {} & (m-1)(m-2)\ldots(m-k) \\ & - \frac{n}{1}(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1) + \ldots \\ & + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}(m-k)\ldots(m-2k+1) \\ & + (-1)^{n}(m-k-1)\ldots(m-2k). \end{aligned}$$

est indépendante de m *pour* $k = n$, *ou* $k < n$,
Dans le premier cas $A = n!$, *dans le second* $A = 0$.

(Genty.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Posons

$$k = n \qquad \text{et} \qquad (m-1)(m-2)\ldots(m-n) = f(m),$$

l'expression proposée peut s'écrire

$$\begin{aligned} A = {} & f(m) - \frac{n}{1} f(m-1) + \ldots \\ & + (-1)^{\mu} \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{\mu!} f(m-\mu) + \ldots \\ & - (-1)^{n} f(m-n). \end{aligned}$$

Développant les $f(m-\mu)$ par la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} A = {} & f(m)\left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots - (-1)^{n-1}\frac{n}{1} + (-1)^{n}\right] \\ & + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^{\mu} \frac{f^{(\mu)}(m)}{\mu!} \left[- \frac{n}{1} 1^{\mu} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{\mu} - \ldots \right. \\ & \left. \qquad + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} (n-1)^{\mu} + (-1)^{n} n^{\mu} \right]. \end{aligned}$$

Tous les coefficients de $f(m)$ et de ses dérivées successives sont nuls, à l'exception du dernier que l'on obtient en faisant $\mu = n$, et qui se réduit à $n!$.

On remarquera, en effet, que le coefficient de $f(m)$ est égal à la valeur que prend le développement de $(1-x)^n$ pour $x=1$. Celui de $-\frac{f'(m)}{1}$ est égal à la dérivée de $(1-x)^n$, pour $x=1$; celui de $\frac{f^{(2)}(m)}{1.2}$ s'obtient en multipliant par x la dérivée de $(1-n)^n$ prenant la dérivée du produit et faisant dans le résultat $x=1$. En général, le coefficient de $\frac{(-1)^\mu f^{(\mu)}(m)}{\mu!}$ est égal à la valeur que prend, pour $x=1$, le polynome

$$\begin{aligned}-n(1-x)^{n-1} - Bx(1-x)^{n-2} - Cx^2(1-x)^{n-3} + \ldots \\ + (-1)^\mu n(n-1)\ldots(n-\mu+1)x^{\mu-1}(1-x)^{n-\mu},\end{aligned}$$

valeur qui sera nulle pour $\mu < n$, mais qui devient $(-1)^n n!$ pour $\mu = n$. Alors le dernier terme du développement, le seul qui subsiste,

$$\frac{(-1)^n f^{(n)}(m)}{n!}(-1)^n n! = n!,$$

car

$$\frac{f^{(n)}(m)}{n!} = 1.$$

Question 1769.

(1897, p. 291.)

Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes; les circonférences de cercles, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. (Mannheim.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Prenant pour pôle le foyer, pour axe polaire la perpendiculaire menée du foyer à la directrice correspondante, l'équation de la conique donnée sera

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Le rayon vecteur ρ_1 qui complète la corde $\rho+\rho_1$ est donné par la relation

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

et le lieu des centres des cercles de diamètre $\rho+\rho_1$ aura pour équation

$$r = \frac{\rho_1 - \rho}{2} = \frac{pe\cos\theta}{1 - e^2\cos^2\theta},$$

qui, en coordonnées ordinaires, s'écrira

$$x^2(1-e^2) + y^2 - pex = 0.$$

Cette relation représente une ellipse pour $e<1$, une parabole pour $e=1$, et une hyperbole pour $e>1$. Or le lieu des centres des cercles variables tangents à deux circonférences données est une ellipse, si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre, une parabole, si le rayon de l'une d'elles est infini, une hyperbole, si elles sont extérieures l'une à l'autre.

Autres solutions de MM. Auton Alexander, E.-N. Barisien, G. Cardoso-Laynes, Dulimbert, E. Malo.

Question 1771.

(1897, p. 340.)

Soient ABC *un triangle équilatéral,* (S) *le cercle inscrit dans ce triangle, abc un triangle équilatéral inscrit dans le cercle* (S) :

1° *Les droites* Aa, Bc, Cb *se coupent en un même point* α ;

2° *Quand le triangle abc se meut dans le cercle* (S), *le point* α *décrit une hypocycloïde à trois rebroussements ;*

3° *Construire la tangente au point* α *en partant de ce mode de génération de la courbe.* (Genty.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, R le rayon de ce cercle, φ l'angle $\widehat{aOA}$.

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine

en O, OA étant l'axe des x. Le rayon du cercle (S) étant $\frac{R}{2}$, on a immédiatement pour les coordonnées des six points A, B, C, a, b, c.

$$\begin{array}{lll}
A. & x = R, & y = 0, \\
B. & x = -\frac{R}{2}, & y = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \\
C. & x = -\frac{R}{2}, & y = -\frac{R\sqrt{3}}{2}, \\
a. & x = \frac{R}{2}\cos\varphi, & y = \frac{R}{2}\sin\varphi, \\
b. & x = -\frac{R}{2}\cos(60^\circ - \varphi), & y = \frac{R}{2}\sin(60^\circ - \varphi), \\
c. & x = -\frac{R}{2}\cos(60^\circ + \varphi), & y = -\frac{R}{2}\sin(60^\circ + \varphi).
\end{array}$$

1° L'équation de la droite Aa est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ R & 0 & 1 \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant le déterminant,

$$(1) \qquad x\sin\varphi + y(2 - \cos\varphi) - R\sin\varphi = 0.$$

L'équation de la droite Bc s'écrit

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -R & R\sqrt{3} & 2 \\ R\cos(60^\circ + \varphi) & R\sin(60^\circ + \varphi) & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} 2x\left[\sqrt{3} + \sin(60^\circ + \varphi)\right] - 2y\left[\cos(60^\circ + \varphi) - 1\right] \\ \quad + R\left[\sin(60^\circ + \varphi) + \sqrt{3}\cos(60^\circ + \varphi)\right]. \end{cases}$$

L'équation de la droite Cb est de même

$$(3) \quad \begin{cases} 2x\left[\sqrt{3} + \sin(60^\circ - \varphi)\right] + 2y\left[\cos(60^\circ - \varphi) - 1\right] \\ \quad + R\left[\sin(60^\circ - \varphi) + \sqrt{3}\cos(60^\circ - \varphi)\right]. \end{cases}$$

En retranchant les équations (2) et (3), on retombe sur

l'équation (1). Donc les droites (1), (2) et (3) concourent en un point α.

2° Pour trouver les coordonnées de ce point α, ajoutons (2) et (3), il vient,

$$(4)\qquad x(2+\cos\varphi)+y\sin\varphi+R\cos\varphi=0.$$

En résolvant (1) et (4), on trouve pour les cordonnées de α,

$$(5)\qquad x=\frac{R}{3}(\cos2\varphi-2\cos\varphi),\qquad y=\frac{R}{3}(\sin2\varphi+2\sin\varphi).$$

Or, si l'on pose $\psi=180°-\varphi$, on a

$$(6)\qquad x=\frac{R}{3}(2\cos\psi-\cos2\psi),\qquad y=\frac{R}{3}(2\sin\psi-\sin2\psi).$$

Sous cette forme on reconnaît les équations relatives à une hypocycloïde triangulaire dont les trois points de rebroussement sont A, B et C.

L'angle ψ étant l'angle $\widehat{\alpha OA}$, il en résulte que les droites $O\alpha$ et Oa sont également inclinées sur OA.

3° Construisons le cercle de rayon $\frac{R}{3}$ qui passe par α et est tangent au cercle ABC. Si de O comme centre avec le rayon $\frac{2R}{3}$ on décrit un cercle, si de α comme centre avec le rayon $\frac{R}{3}$ on décrit un autre cercle, ces deux cercles se rencontrent en deux points I et I'. On voit, sans ambiguïté, que celui de ces deux points qui est situé entre α et A est le centre I du cercle Σ passant par α, ayant $\frac{R}{3}$ pour rayon, tangent au cercle ABC. Ce cercle Σ dans son roulement intérieur sur le cercle ABC, en partant du point A, décrit le point α, après avoir tourné de l'angle 3ψ. La droite OI rencontre le cercle ABC au point P (on prend celui des deux points d'intersection tel que I soit situé entre O et P). La normale à l'hypocycloïde au point α est donc la droite αP qui unit le point α au point de contact P des cercles Σ et ABC.

Remarque. — Il est évident que les droites Bb, Ac et Ca se coupent en un point α, et que les droites Cc, Ab et Ba se coupent en un point γ. Ces deux points β et γ sont situés sur l'hypocycloïde (6).

On verrait aussi que *les droites* $A\alpha$, $B\beta$ *et* $C\gamma$ *forment un triangle équilatéral*.

Autre solution de M. DULIMBERT.

QUESTIONS.

1826. Démontrer le développement suivant d'une fonction entière de z suivant les puissances croissantes du trinome $z^2 - bc - c$:

$$f(z) = (z - Bz) + \left(\frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial B}{\partial c} z\right)(z^2 - bz - c)$$
$$- \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial c^2} z\right)(z^2 - bz - c)^2 + \ldots$$
$$- \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial^s A}{\partial c^s} + \frac{\partial^s B}{\partial c^s} z\right)(z^2 - bz - c)^s + \ldots,$$

où A et B sont fonctions de b et de c. (P. BURGATTI.)

1827. Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés, on obtienne un faisceau en involution se compose de quinze courbes du troisième ordre, qui passent toutes par les six points donnés. (E. DEWULF.)

1828. Douze points quelconques étant donnés dans un plan, il existe 411840 points, tels qu'en les joignant aux douze points donnés, on obtienne deux faisceaux en involution.

(E. DEWULF.)

1829. On donne une conique (S) et un triangle ABC conjugué par rapport à cette conique.

Soient m un point de la courbe et (ε) une conique tangente à (S) au point m et circonscrite au triangle ABC; on demande le lieu du point d'intersection de la tangente commune au point m, avec la seconde corde commune aux courbes (S) et (ε).

Résoudre la même question en supposant que la conique (S) est inscrite dans le triangle ABC. (E. GENTY.)

[M¹5c]

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES CUBIQUES CUSPIDALES;

Par M. Ch. ZAHRADNIK,
Professeur de Mathématiques à l'Université de Zagreb.

1. Prenant le point de rebroussement pour origine des coordonnées, la tangente en ce point pour axe des X, et la droite qui joint ce point au point d'inflexion pour axe des Y, on aura comme équation de la courbe C_3^3

$$ax^3 + bxy^2 + cy^3 = dy^2.$$

Cette courbe est unicursale; les coordonnées de ses points sont fonctions rationnelles du paramètre

$$u = \frac{x}{y} = \frac{\sin(yu)}{\sin(ux)}.$$

On a, comme on sait,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{du}{au^3 + bu + c}, \\ y = \dfrac{d}{au^3 + bu + c}. \end{cases}$$

Par la substitution de ces valeurs dans l'équation d'une droite, on trouve

$$(2) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

comme condition pour que trois points de la courbe C_3^3 soient en ligne droite. Si deux de ces points coïncident, on a $u_2 = u_3 = u$ et la droite en question devient la tangente à la courbe C_3^3 au point u.

La relation (2) se réduit à

$$(3) \qquad 2u + u_1 = 0.$$

Le point u est le point de contact de la tangente ; cette tangente rencontre la courbe C_3^3 en u_1. Le point u_1 s'appelle le *tangentiel* du point u (¹).

DROITES SATELLITES.

2. Soient

$$\xi x + \eta y - 1 = 0$$

l'équation d'une droite P et u_1, u_2, u_3 les points d'intersection de cette droite avec la courbe C_3^3. Traçons les tangentes à la courbe en ces points. Ces tangentes rencontrent respectivement la courbe C_3^3 en trois points u'_1, u'_2, u'_3, qui seront situés sur une même droite. D'après (3), on aura

$$2u_1 + u'_1 = 0, \qquad 2u_2 + u'_2 = 0, \qquad 2u_3 + u'_3 = 0.$$

En additionnant ces trois relations, on obtient

$$2(u_1 + u_2 + u_3) + u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0.$$

et eu égard à (2), on trouve enfin $u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0$, qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les points u'_1, u'_2, u'_3, tangentiels des points u_1, u_2, u_3, soient sur la ligne droite. La droite sur laquelle se trouvent les tangentiels u'_h des trois points u_h porte le nom de *droite satellite* de la droite P. Désignons-la par R_1. De la même manière, l'on peut trouver R_2, c'est-à-dire la droite satellite de la droite R_1 ou la seconde satellite de la droite P. Les intersections u''_h de la droite R_2 avec la courbe C_3^3 satisfont à la condition

$$2u'_h + u''_h = 0, \qquad h = 1, 2, 3.$$

On aura donc

$$u''_h = -2u'_h = 2^2 u_h.$$

(¹) SALMON-CHEMIN, *Courbes planes*, p. 188.

On obtiendrait de même les droites satellites consécutives de la droite P jusqu'à la satellite $n^{ième}$ R_n. Entre les paramètres $u_h^{(n)}$ de ses intersections avec la courbe C_3^3 et des intersections $u_h^{(n-1)}$ de la droite R_{n-1} existe la relation

$$2u_h^{(n-1)} + u_h^{(n)} = 0, \qquad h = 1, 2, 3,$$

d'où

$$u_h^{(n)} = -2u_h^{(n-1)}.$$

Substituant à n les valeurs 1, 2, 3, ..., n, on trouve enfin

$$u_h^{(n)} = (-2)^n u_h, \qquad h = 1, 2, 3$$

comme relation entre les paramètres des intersections de la droite P avec C_3^3 et les paramètres correspondants de sa $n^{ième}$ satellite R_n.

La courbe C_3^3 étant construite et la position de la droite P étant fixée, on peut facilement construire la satellite R_n. La construction s'appuie sur la signification géométrique du paramètre u. Pour $\lim n = \infty$, on a

$$\lim u_h^{(n)} = \pm\infty, \qquad h = 1, 2, 3$$

Le résultat obtenu nous enseigne que la satellite R_n de plus en plus s'approche de la tangente au point de rebroussement de la courbe C_3^3; ils coïncident pour $n = \infty$.

Cherchons maintenant à déterminer la droite S_1 dont la satellite est la droite P. Soit v_h le point de contact de la tangente menée du point u_h à la courbe C_3^3, on aura

$$u_h + 2v'_h = 0, \qquad h = 1, 2, 3,$$

et, en vertu de la relation (2),

$$\sum_{h=1}^{3} v'_h = 0.$$

Cela veut dire que les points de contact des tangentes.

menées des points d'intersection de la droite P avec la courbe C_3^3 sur la même courbe, sont sur une ligne droite S_1. La droite S_1 peut s'appeler *satellite négative* de la droite P. La satellite négative de la droite S_1 est S_2, et pour elle on trouve tout de suite

$$v'_h + 2v''_h = 0.$$

d'où

$$v''_h = -\frac{1}{2}v'_h = \frac{1}{2^2}v_h. \qquad h = 1, 2, 3.$$

En procédant de la même manière, nous parviendrons jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ satellite négative S_n et aux relations

$$v_h^{(n-1)} + 2v_h^{(n)} = 0,$$

$$v_h^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_h. \qquad h = 1, 2, 3.$$

Pour $\lim n = \infty$, on a $\lim v_h^n = 0$; la droite S_n s'approche de la tangente stationnaire. Ils coïncident pour $\lim n = \infty$; nous allons le démontrer.

3. En vertu de (2), l'équation de la droite passant par deux points u_1 et u_2 peut être écrite

$$(c + a u_1 u_2 u_3)y + [b + a(u_3^2 - u_1 u_2)]x - d = 0.$$

Comme on a $\overline{u_1 u_2} \equiv \overline{u_2 u_3} \equiv \overline{u_3 u_1} \equiv P$, on aura, après les permutations cycliques des indices et après avoir additionné les équations résultantes et supprimé le facteur 3,

$$(6) \qquad P \equiv [b - a(u)_2]x + [c + a(u)_3]y - d = 0.$$

$(u)_k$ signifie la somme des combinaisons k à k des paramètres u_1, u_2, u_3.

Pour la droite S_n, nous aurons

$$(v^{(n)})_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n}(u)_3.$$

$$(v^{(n)})_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(u)_2.$$

par conséquent

$$S_n \equiv \left[b + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} a(u)_2\right] x + \left[c + \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n} a(u)_3\right] y - d = 0.$$

Au cas de $\lim n = \infty$, cette expression devient

$$\lim_{n=\infty} S_n \equiv bx + cy - d = 0 \tag{7}$$

C'est précisément l'équation de la tangente stationnaire de la courbe C_3^3.

Posons $P \equiv R_0$, $S_n \equiv R_{-n}$, on aura le théorème suivant :

Dans la suite illimitée des droites R_h, *h partant de* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$, *chaque droite est la satellite de la droite qui la succède.*

CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE ENTRE P ET R_1 PAR RAPPORT A C_3^3.

4. Dans ce qui précède, nous avons reconnu la correspondance univoque et réciproque des droites P et R_1. A chaque droite P correspond une droite R_1 et réciproquement à chaque droite R_1 correspond une droite P, passant par les points de contact des tangentes menées des points d'intersection de la droite P avec la courbe C_3^3 à cette même courbe.

Soient ξ, η les coordonnées de la droite P, ξ_1, η_1 les coordonnées de R_1, on trouve au moyen de l'équation (6) pour la droite P

$$a(u)_2 = b + d\xi,$$
$$a(u)_3 = -c - d\eta.$$

et par analogie pour la droite R_1

$$a(u')_2 = b + d\xi_1.$$
$$a(u')_3 = -c - d\eta_1.$$

Tenant compte de la relation (3), on peut écrire

$$(u')_2 = 4(u)_2,$$
$$(u')_3 = -8(u)_3;$$

alors

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= 4\xi + \frac{3b}{d}, \\ \eta_1 &= -8\eta - \frac{9c}{d}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (8) déterminent la correspondance homographique entre les systèmes des droites P et R_1 dans le plan de la courbe C_3^3.

5. Les droites doubles de la transformation homographique, c'est-à-dire les droites coïncidant avec leurs satellites, satisfont aux conditions

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta = \eta_1.$$

Des équations (8), on tire immédiatement

$$\xi = -\frac{b}{d}, \qquad \eta = -\frac{c}{d},$$

c'est-à-dire que la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 est la droite double de cette transformation homographique.

Si l'on emploie les coordonnées homogènes de Hesse, on peut écrire les équations (8) sous la forme

$$(8\,bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} \rho\xi_1 &= 4d\xi + 3b\xi, \\ \rho\eta_1 &= -8d\eta - 9c\xi, \\ \rho\xi_1 &= d\xi. \end{aligned} \right.$$

Au cas de $P = R_1$, on a

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 4d-\rho & 0 & 3b \\ 0 & -8d-\rho & -9c \\ 0 & 0 & d-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de ces équations sont

$$\rho_1 = d, \qquad \rho_2 = 4d, \qquad \rho_3 = -8d.$$

Dans le cas $\rho_1 = d$, on obtient le résultat connu que la droite double de cette homographie est la tangente au point d'inflexion de la courbe C_3^3. A la racine $\rho_2 = 4d$ correspond l'axe des Y comme seconde droite double, et pour $\rho_3 = -8d$, on obtient l'axe des X, c'est-à dire la tangente au point de rebroussement de la courbe C_3^3 comme troisième droite double de la correspondance homographique. Le triangle des droites doubles est donc constitué de la tangente au point de rebroussement, de la tangente au point d'inflexion et de la droite passant par les points de rebroussement et par le point d'inflexion de la courbe C_3^3.

6. A l'aide de l'équation (8) on obtient directement l'équation de la droite R_1^* qui correspond à la droite à l'infini dans le système ΣP. Les coordonnées tangentielles de la droite R_1^* sont $\frac{3b}{d}$, $-\frac{9c}{d}$; son équation est par conséquent

$$(9) \qquad R_1^* \equiv 3bx - 9cy + d = 0.$$

A la droite à l'infini du système ΣR_1 correspond la droite P^*, dont les coordonnées tangentielles sont $-\frac{3b}{4d}$, $-\frac{9c}{8d}$, et l'on a comme auparavant

$$(10) \qquad P^* \equiv 6bx - 9cy - 8d = 0.$$

7. Si la droite $P(\xi, \eta)$ passe par le point $p(x, y)$, la droite $R_1(\xi_1, \eta_1)$ passera par le point $r_1(\xi_1, \eta_1)$.

Substituons dans l'équation

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

à ξ et η les valeurs tirées des équations (8), nous aurons

$$-\frac{2dx}{6bx+9cy-8d}\xi_1+\frac{dy}{6bx+9cy-8d}\eta_1+1=0.$$

Cela veut dire que la droite $R_1(\xi_1, \eta_1)$ passe par le point r_1 dont les coordonnées sont

$$(11)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2dx}{6bx+9cy-8d}, \\ y_1 = \dfrac{dy}{6bx+9cy-8d}. \end{cases}$$

Au point p de la droite P correspond un seul point r_1 situé sur la droite R_1. Nous en concluons que si la droite P tourne autour de son point p, la droite conjuguée R_1 tournera autour de son point r_1. Les points p et r_1 sont conjugués. Si le point p décrit la droite P, le point conjugué r_1 décrira la droite conjuguée R_1.

Cela nous conduit à la correspondance homographique des points p et des points conjugués r, dans le plan de la courbe C_3^3. Cette correspondance est déterminée par les équations

$$(12)\quad \begin{cases} \mu x = 4dx_1, \\ \mu y = -8dy_1, \\ \mu z = 3bx_1 - 9cy_1 + dz_1, \end{cases}$$

qui dérivent des relations (8 *bis*) par la substitution transposée des équations (11), écrites dans les coordonnées homogènes et résolues par rapport à x, y, z. Les points doubles de cette transformation sont les intersections des droites doubles de la transformation homographique (8). Pour les points doubles ou unis, on a $x_1 = x$, $y_1 = y$; à l'aide de (11), on obtient pour les coordonnées des points doubles $(0, 0)$, $\left(0, \frac{d}{c}\right)$, $\left(\frac{d}{b}, 0\right)$.

On aurait pu aussi partir de l'équation (12) et,

pour $p = r_1$, on trouverait

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 4d-\mu & 0 & 0 \\ 0 & -8d-\mu & 0 \\ 3b & -9c & d-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

8. Dans la transformation établie pour (12), au faisceau (p) des rayons P correspond le faisceau homographique (r_1) des rayons R_1. Ces deux faisceaux déterminent la conique, passant par les sommets p et r_1 et par les points doubles de cette transformation. Pour les coordonnées de l'intersection des rayons conjugués $P(\xi, \eta)$ et $R_1(\xi_1, \eta_1)$ on trouve, à l'aide de (8),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{3(d\eta+c)}{4d\xi\eta+3c\xi+b\eta}, \\ y &= -\frac{d\xi+b}{4d\xi\eta+3c\xi+b\eta}. \end{aligned}\right.$$

La droite (ξ, η) appartient au faisceau (p); en vertu de cela, elle passe par le point $p(\alpha, \beta)$, et l'on a par conséquent

$$\alpha\xi+\beta\eta+1=0.$$

Il est évident que l'on peut, dans l'équation (13), exprimer ξ par η ou réciproquement. De cette manière, on obtient les coordonnées des points de la conique en question comme des fonctions rationnelles du paramètre ξ ou η. Pour $\eta = -\frac{c}{d}$, on a $\xi = \frac{\beta c - d}{\alpha d}$, et la conique passe par le point double $\left(0, \frac{d}{c}\right)$; pour $\xi = \frac{b}{d}$, $\eta = \frac{\alpha b - d}{\beta d}$, elle passe par le point double $\left(\frac{d}{b}, 0\right)$, et enfin, pour $\xi = \infty$ et $\eta = \infty$, elle passe par le point double (0, 0).

De cette manière, au point p l'on pourrait faire correspondre la conique $C(p)$. A l'aide du paramètre ξ on

a, pour les coordonnées des points de cette conique

$$(13\ bis)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3[(\beta c - d) - a d\xi]}{(4 d\xi + b)(\alpha\xi + 1) - 3\beta c\xi}, \\ y = \dfrac{\beta(\alpha\xi + b)}{(4 d\xi + b)(\alpha\xi + 1) - 3\beta c\xi}. \end{cases}$$

Pour les points p qui sont en dehors de la parabole

$$\Pi = (bx - 3cy + 4d)^2 - 16b\,dx = 0,$$

la conique correspondante $C(p)$ est une hyperbole ; aux points situés sur cette parabole ou dans son intérieur correspond une parabole ou ellipse respectivement. L'on peut donc, au point p, faire correspondre le point r_1 ou la conique passant par les points p et r et par les points doubles du système.

9. Nous savons déjà qu'à chaque point p de la droite P correspond un, et un seul, point r_1 sur la droite R_1. Si le point p se meut de manière qu'il reste toujours sur la droite P, le point conjugué r_1 décrira la droite R_1. Les points conjugués des droites P et R_1 forment deux systèmes homographiques des points ; la droite mobile, qui joint deux points homologues quelconques de ces deux systèmes, décrit une courbe de la deuxième classe, tangente aux deux droites fixes P et R_1 et aux droites doubles du système.

Les coordonnées ξ, η_1 de la droite T qui joint les points correspondants p et r_1 sont

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2bx + 3cy - 3d}{dx}, \\ \eta_1 = -\dfrac{2bx + 3cy - 2d}{dy}. \end{cases}$$

Le point p étant sur la droite fixe $P(m, n)$, on a

$$mx + ny + 1 = 0.$$

En vertu de cette relation l'on peut, dans le système (14), exprimer x par y ou réciproquement. Cela nous fournit la représentation paramétrique de cette conique. On s'assure directement, à l'aide des équations (14), que ladite conique touche les droites doubles du système. Si le point p est sur la tangente d'inflexion (7), on a $\xi = -\frac{b}{a}$, $\eta = -\frac{c}{d}$; la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 est une tangente de la conique, etc.

On pourrait encore énoncer le théorème suivant :

A la droite P *correspond la conique* T(P), *enveloppe de la droite mobile qui joint les points homologues sur les droites* P *et* R_1.

DROITES SATELLITES NORMALES.

10. La condition pour que les droites P et R_1 soient perpendiculaires est $\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = 0$, et l'on a en vertu de (8)

$$\Pi = 4d\xi^2 - 8d\eta^2 + 3b\xi - 9c\eta = 0.$$

Les droites P et R_1 seront perpendiculaires si la droite P touche la parabole Π. A la parabole Π, enveloppe des droites P, correspond la parabole

$$\Pi' = d(\xi_1^2 - \eta_1^2) - 3b\xi_1 - 9c\eta_1 = 0.$$

Le lieu des sommets de l'angle droit dont un côté glisse sur la parabole Π et l'autre sur la parabole Π', est une courbe rationnelle du quatrième degré; ses points doubles coïncident avec les points doubles du système.

A l'aide de $\xi = \lambda\eta$, l'on peut exprimer ξ et η, et, par conséquent, x et y dans l'équation (13), comme les fonctions rationnelles du paramètre λ.

L'AFFINITÉ QUADRATIQUE RÉCIPROQUE.

11. Les coordonnées du point t, intersection des droites P et R_1 sont

$$(13) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3(d\eta + c)}{4d\xi\eta + 3c\xi + b\eta}, \\ y = -\dfrac{d\xi + b}{4d\xi\eta + 3c\xi + b\eta}, \end{cases}$$

Par la division de ces deux équations, on trouve

$$dx\xi - 3dy\eta + bx - 3cy = 0.$$

Le point $t(x, y)$ étant sur la droite $P(\xi, \eta)$, on aura

$$x\xi + y\eta + 1 = 0.$$

Les deux dernières équations donnent

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{-bx + 3cy - 3d}{4dx}, \\ \eta = \dfrac{bx - 3cy - d}{4dy}. \end{cases}$$

Les équations (13) et (15) nous montrent qu'entre la droite P et le point conjugué $t \equiv R_1 P$ existe une affinité rationnelle, quadratique et réciproque.

12. Nous pouvons partir aussi du point $p(x, y)$ sur la droite P. A ce point correspond le point r_1 sur la droite R_1. Pour les coordonnées de la droite $T \equiv pr_1$, qui joint les points homologues p et r_1, nous avons trouvé

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2bx + 3cy - 3d}{dx}, \\ \eta = \dfrac{-2bx + 3cy + 2d}{dy}. \end{cases}$$

A chaque point p sur la droite P correspond une droite T, qui passe par ce point; réciproquement, à

chaque droite T correspond un point p sur la droite P, intersection de ces deux droites T et P. Si l'on résout les équations (14) par rapport à x et y, on obtient

$$(16)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3(d\eta + c)}{d\xi\eta + 3c\xi - 2b\eta}, \\ y = -\dfrac{2(d\xi - b)}{d\xi\eta + 3c\xi - 2b\eta}. \end{cases}$$

De cette manière, nous sommes conduits à deux affinités rationnelles, quadratiques et réciproques. Les coordonnées des éléments correspondants satisfont à l'équation $x\xi + y\eta + 1 = 0$. Les éléments principaux de cette affinité quadratique réciproque sont les éléments doubles de la transformation homographique précitée.

Si l'on écrit les équations de l'affinité (15) avec le même dénominateur $4dxy$, l'on aura

$$y[-(b + 4d\xi)x + 3cy - 3d] = 0,$$
$$x[bx - (3c + 4\eta)y - d] = 0.$$

Les coordonnées des points d'intersection de ces deux coniques dégénérées (0, 0), $\left(0, \frac{d}{c}\right)$, $\left(\frac{d}{b}, 0\right)$ ne dépendent pas de la droite (ξ, η); seulement, le quatrième point d'intersection, dont les coordonnées sont données par (13), en dépend.

A la ligne droite (ξ, η), lieu des points (x, y), correspond la courbe de la deuxième classe, touchant les droites principales; à un point (x, y), sommet du faisceau des rayons (ξ, η) correspond une courbe du deuxième degré, qui passe par les points principaux. A la courbe de la deuxième classe, qui ne touche aucune droite principale, correspond une courbe de la quatrième classe, dont les points doubles coïncident avec les points principaux de cette affinité, etc.

CORRESPONDANCES HOMOGRAPHIQUES SUCCESSIVES.

13. Le système des droites P et le système des droites R_1 sont en correspondance homographique, établie par les équations (8). Mais les droites P et leurs $n^{\text{ièmes}}$ droites satellites sont aussi en correspondance, qui est déterminée par les relations

$$(17)\quad \begin{cases} \xi_n = 4^n \xi + (4^n - 1)\dfrac{b}{d}, \\ \eta_n = (-8)^n \eta + [(-8)^n - 1]\dfrac{c}{d}. \end{cases}$$

De ces équations, on reconnait que les systèmes ΣR_m et ΣR_n sont aussi en correspondance homographique et que l'on a

$$\xi_n = 4^{n-m} \xi_m + (4^{n-m} - 1)\frac{b}{d},$$

$$\eta_n = (-8)^{n-m} \eta_m + [(-8)^{n-m} - 1]\frac{c}{d}.$$

Toutes ces correspondances ont les mêmes droites doubles : tangente au point de rebroussement, tangente stationnaire et la droite qui joint le point de rebroussement au point d'inflexion.

14. Maintenant nous démontrerons que les droites R_n, satellites de la droite P, touchent une courbe de la troisième classe.

Les équations

$$d\xi_n + b = 4^n (d\xi + b),$$

$$d\eta_n + c = (-8)^n (d\eta + c)$$

peuvent s'écrire

$$\frac{d\xi_n + b}{d\xi + b} = 4^n, \qquad \frac{d\eta_n + c}{d\eta + c} = (-8)^n,$$

d'où

$$\left(\frac{d\xi_n + b}{d\xi + b}\right)^3 = \left(\frac{d\eta_n + c}{d\eta + c}\right)^2,$$

et enfin

$$\frac{(d\xi_n + b)^3}{(d\eta_n + c)^2} = \frac{(d\xi + b)^3}{(d\eta + c)^2}.$$

On voit donc que le quotient $\frac{(d\xi + b)^3}{(d\eta + c)^2}$ a la même valeur k pour la droite P et pour toutes ses droites satellites R_n, n variant de $-\infty$ à $+\infty$. On a donc

$$(d\xi + b)^3 = k(d\eta + c)^2.$$

Les droites satellites touchent une certaine courbe de la troisième classe et, comme nous le verrons, du troisième degré.

En employant la substitution

$$d\eta + c = (d\xi + b)u,$$

on trouve

$$(19)\qquad \begin{cases} \eta = \dfrac{ku^3 - c}{d}, \\ \xi = \dfrac{ku^2 - b}{d}. \end{cases}$$

Les points d'intersection des deux tangentes infiniment voisines sont les points de la courbe en question. Leurs coordonnées sont données par les équations

$$(20)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{3ud}{ku^3 - (b + c)u + 3c}, \\ y = \dfrac{(u - 3)d}{ku^3 - (b + c)u + 3c}. \end{cases}$$

Toutes les satellites de la droite P touchent donc une courbe Γ_3^3.

La tangente au point de rebroussement et la tangente stationnaire de la courbe C_3^3 sont aussi les tangentes de la courbe Γ_3^3.

Cela résulte directement des nos 2 et 3 ou des équations (19).

Cherchons maintenant à déterminer le lieu des points t, qui sont conjugués aux droites satellites successives R_1, R_2, ... de la droite P, par rapport à C_3^3. A l'aide des équations (15), on trouvera

$$d\xi + b = \frac{3(bx + cy - d)}{4x},$$

$$d\eta + c = \frac{bx + cy - d}{4y}.$$

Les points t, conjugués aux droites satellites R_n, sont sur la cubique cuspidale

$$4kx^3 = 27(bx + cy - d)y^2.$$

Cette courbe et la courbe donnée C_3^3 coïncident pour

$$k = -\frac{27}{4}a.$$

RÉSULTATS OBTENUS A L'AIDE DES COORDONNÉES TRILINÉAIRES.

15. Le triangle constitué de la tangente stationnaire, de la tangente au point de rebroussement et de la droite qui joint le point de rebroussement au point d'inflexion, joue un rôle spécial dans la théorie des cubiques cuspidales.

Prenons ce triangle pour le triangle de référence.

L'équation de la courbe C_3^3 sera alors

$$x_1^2 x_3 - x_2^3 = 0, \tag{21}$$

$x_3 = 0$ est la tangente stationnaire et $x_1 = 0$ tangente au point d'inflexion. L'équation (21) peut être remplacée par le système des équations

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 = 0, \\ \lambda^2 x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \tag{22}$$

cela veut dire que la courbe C_3^3 peut être engendrée à l'aide des deux faisceaux des rayons, qui se correspondent un à deux (*einzweideutig*) ([1]). Les coordonnées du point qui correspond au paramètre λ sont 1, λ, λ^3. L'équation de la droite $\overline{\lambda_1\lambda_2}$, qui joint les points λ_1 et λ_2, est

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)x_1-(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)x_2+x_3=0.$$

Trois points λ_1, λ_2, λ_3 de la courbe C_3^3 sont en ligne droite quand on a

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

A cause de ([2])

$$\overline{\lambda_1\lambda_2}\equiv\overline{\lambda_2\lambda_3}\equiv\overline{\lambda_3\lambda_1}\equiv P.$$

on aura

$$P\equiv(\lambda)_3x_1+(\lambda)_2x_2-x_3=0.$$

Pour la droite satellite R_1, nous trouverons de la même manière qu'au n° 4

$$R_1\equiv-8(\lambda)_3x_1+4(\lambda)_2x_2-x_3=0.$$

Désignons par ξ_i et ξ'_i les coordonnées de la droite P ou de la droite R_1 respectivement, nous aurons

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}k\xi'_1&=-8\xi_1,\\ k\xi'_2&=4\xi_2,\\ k\xi'_3&=\xi_3.\end{aligned}\right.$$

Si la droite P passe par le point $p(y_1, y_2, y_3)$ la droite satellite R_1 passera, en vertu des équations (23), par le point $r_1(-y_1, 2y_2, 8y_3)$: on a donc

$$(24)\qquad\left\{\begin{aligned}\nu y'_1&=-y_1,\\ \nu y'_2&=2y_2,\\ \nu y'_3&=8y_3.\end{aligned}\right.$$

([1]) ÉM. WEYR, *Theorie der mehrdeatigen Elementargebilde*. Leipzig, 1870.

([2]) Cf. n° 3.

Des équations (23), on déduit immédiatement que le triangle de référence est le triangle des rayons doubles de la transformation homographique, qui renferme les systèmes des droites P et de leurs droites satellites R_1 par rapport à la courbe C_3^3.

Des équations (23), nous avons déduit les équations (24); mais on peut les déduire aussi à l'aide de la substitution transposée en écrivant

$$(24\ bis)\qquad \begin{cases} \nu_1 y_1 = -\ 8y'_1, \\ \nu_1 y_2 = \quad 4y'_2, \\ \nu_1 y_3 = \quad\ \ y'_3. \end{cases}$$

On parviendrait aussi à ces équations en employant les coordonnées tangentielles; la courbe C_3^3 serait représentée par l'équation

$$\xi_1^2\xi_3 - \xi_2^3 = 0.$$

16. Pour les coordonnées du point $t \equiv PR_1$, on aura

$$(25)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = -\quad \xi_2\xi_3, \\ \rho x_2 = -\ 3\xi_1\xi_3, \\ \rho x_3 = \quad\ 4\xi_1\xi_2, \end{cases}$$

et, pour les coordonnées de la droite $T \equiv \overline{pr_1}$,

$$(26)\qquad \begin{cases} \sigma\xi_1 = 2x_2x_3, \\ \sigma\xi_2 = 3x_1x_3. \\ \sigma\xi_3 = \ \ x_1x_2. \end{cases}$$

Les équations (25) établissent l'affinité rationnelle, quadratique et réciproque de la droite P et du point satellite $t \equiv PR_1$.

L'affinité de la même nature du point p et de la droite $\overline{pr_1}$ est déterminée par (26).

Cherchons enfin à déterminer l'enveloppe des satel-

lites successives de la droite P. A cause de

$$k\xi_1(n) = (-8)^n \xi_1,$$
$$k\xi_2(n) = 4^n \xi_2,$$
$$k\xi_3(n) = \xi_3,$$

on trouvera

$$\xi_3 \xi_1^2 - a \xi_2^2 = 0.$$

Le paramètre a dépend des coordonnées de la droite P.

Toutes les droites satellites d'une droite P sont tangentes à une cubique cuspidale, qui est homographique à la courbe donnée C_3^3.

[B12d]

SUR DES ANGLES RÉSULTANTS;

Par M. G. FONTENÉ.

Le calcul des quaternions comprend celui des quantités complexes ; mais, comme nous interprétons $a+bi$ dans un plan qui a deux dimensions, et $a+bi+cj+dk$ dans un espace qui n'en a que trois, la théorie géométrique qui correspond aux quaternions ne comprend pas celle qui correspond aux quantités complexes. En conséquence, la formule de Bellavitis pour le quadrangle plan quelconque

$$DA \times BC + DB \times CA + DC \times AB = 0$$

donne un théorème dont l'énoncé géométrique ne ressemble nullement à l'énoncé du théorème auquel conduit l'étude du premier membre de cette formule lorsque ABCD est un tétraèdre, et ce dernier théorème n'a même aucun sens pour le quadrangle plan (*Nouvelles Annales*, p. 340, question 1801 ; 1898) ; d'autre

part, le théorème plan qui résulte de la formule de Bellavitis a son analogue dans l'espace, comme on le verra par ce qui suit.

I.

1. *Définition.* — Dans l'espace, l'angle résultant de deux angles (a, b) et (c, d), dont les côtés sont dirigés, est l'angle (e, f) obtenu en amenant ces angles, par glissement dans leurs plans respectifs, le premier dans la position (e, ω), le second dans la position (ω, f), ω étant l'intersection des deux plans prise dans un sens arbitraire si l'on a égard seulement à la grandeur de l'angle $(e f)$, et non à la direction de son plan comme dans la théorie des vecteurs; on peut écrire

$$\mathcal{R} = [(a, b) + (c, d)],$$

le crochet indiquant un angle résultant; les plans m et n étant orientés, on a

$$\cos \mathcal{R} = \cos \widehat{ab} . \cos \widehat{cd} - \sin \widehat{ab} . \sin \widehat{cd} \times \cos \widehat{mn}.$$

Théorème I. — *Dans un tétraèdre* ABCD, *la notation* AB *ou* BA (*indifféremment*) *désignant la droite dirigée qui porte l'arête* AB, *les plans orientés des faces étant* a, b, c, d, *les dièdres étant évalués avec signes autour des arêtes dirigées, si l'on considère* DA *et* BC, DB *et* CA, DC *et* AB, *et si l'on prend avec des signes convenables les angles résultants*

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} L = [(DB, DC) + (AC, AB)] = [(BD, BA) + (CA, CD)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

construits avec les angles des directions positives des arêtes non opposées, ces angles sont ceux des directions positives des côtés d'un triangle LMN, *et les côtés* $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LM}$ *de ce triangle sont proportionnels aux*

produits

$$(2) \qquad l = \overline{DA} \times \overline{BC}, \qquad m = \overline{DB} \times \overline{CA}, \qquad n = \overline{DC} \times \overline{AB},$$

ou encore aux produits

$$(2') \qquad \lambda = \sin \widehat{da} \times \sin \widehat{bc}, \qquad \mu = \sin \widehat{db} \times \sin \widehat{ca}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} L + M + N = 0, \\ \dfrac{l}{\sin L} = \dfrac{m}{\sin M} = \dfrac{n}{\sin N}, \\ \dfrac{\lambda}{\sin L} = \dfrac{\mu}{\sin M} = \dfrac{\nu}{\sin N}, \end{cases}$$

ou encore

$$(4) \qquad \begin{cases} l^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos L, & \ldots, \\ \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos L, & \ldots. \end{cases}$$

Dans la formule (1), la seconde expression de L est construite avec BC, DA, comme la première l'est avec DA, BC. Ce théorème sera démontré.

2. Si les quatre plans a, b, c, d passent par un même point S, en prenant les quantités λ, μ, ν, on a un théorème sur l'angle tétraèdre complet, ou encore un théorème sur le quadrilatère sphérique complet; comme l'arête AB du tétraèdre, tant qu'il existe, est l'intersection des plans c et d, on devra écrire, pour la formule (1),

$$L = [(ac, ab) + (db, dc)] \quad \text{ou} \quad L = [(db, dc) + (ac, ab)],$$

l'ordre étant indifférent au point de vue où l'on se place ici. Nous énoncerons le théorème sur la sphère.

Définition. — Sur la sphère, l'arc résultant de deux arcs de grands cercles AB et CD est l'arc de grand cercle EF obtenu en amenant ces arcs *par glissement*

sur les grands cercles qui les portent, le premier dans la position EO, le second dans la position OF, le point O étant l'un quelconque des deux points d'intersection de ces grands cercles.

Théorème II. — *Étant donné un quadrilatère sphérique complet dont les côtés sont portés par les quatre grands cercles a, b, c, d, si l'on désigne par (db, dc), par exemple, le côté situé sur le grand cercle d et compris entre les grands cercles b et c, et si l'on prend avec des signes convenables les arcs résultants indiqués par les formules*

$$L = [(db, dc) + (ac, ab)] = [(bd, ba) + (ca, cd)],$$

on a les formules (3) *et* (4), *avec les quantités* λ, μ, ν *définies par les formules* (2') *et qui sont ici des produits de sinus d'angles sur la sphère.*

3. Le théorème sur l'angle tétraèdre complet donnerait un théorème corrélatif sur un système de quatre droites issues d'un point, figure que l'on peut appeler un *tétraode;* sur la sphère, on a un théorème concernant le quadrangle sphérique, et c'est celui-ci que nous énoncerons.

Définition. — Sur la sphère, l'angle résultant de deux angles donnés (a, b) et (c, d) est l'angle (e, f) obtenu en amenant ces angles *par rotation autour de leurs sommets respectifs*, le premier dans la position (e, ω), le second dans la position (ω, f), ω étant le grand cercle qui passe par les deux sommets.

Théorème III. — *Étant donné un quadrangle sphérique* A, B, C, D, *si l'on prend avec des signes convenables les angles résultants*

$$L = [(DB, DC) + (AC, AB)] = [(BD, BA) + (CA, CD)], \quad \ldots$$

ces angles sont ceux des directions positives des côtés d'un triangle plan LMN, *et les côtés* $\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{NL}}$, $\overline{\mathrm{LM}}$ *de ce triangle sont proportionnels aux produits*

$$l = \sin \mathrm{DA} \times \sin \mathrm{BC}, \qquad m = \sin \mathrm{DB} \times \sin \mathrm{CA}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a les formules (3) *et* (4) *avec les quantités* l, m, n *définies par les formules* (2).

4. On a en particulier ceci pour un quadrilatère sphérique dans lequel a, b, c concourent en D, ou un quadrangle sphérique dans lequel A, B, C sont sur un même grand cercle d.

Théorème IV. — *Si l'on considère sur une sphère trois points* A, B, C *sur un grand cercle d, et si on les joint à un point* D *de la sphère par trois arcs de grands cercles a, b, c, on a*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sin \mathrm{DA} \times \sin \mathrm{BC}}{\sin bc} &= \frac{\sin \mathrm{DB} \times \sin \mathrm{CA}}{\sin ca} = \ldots, \\ \frac{\sin da \times \sin bc}{\sin \mathrm{BC}} &= \frac{\sin db \times \sin ca}{\sin \mathrm{CA}} = \ldots, \end{aligned}\right.$$

et des formules, analogues aux formules (4), *que nous n'écrirons pas.*

5. Si la sphère dégénère en un plan, on a d'abord le théorème II pour un quadrilatère plan, avec des segments résultants L, M, N dont la somme est nulle quand on les prend avec des signes convenables, et qui sont proportionnels aux quantités λ, μ, ν. On a ensuite le théorème III pour un quadrangle plan, avec $l = \mathrm{DA} \times \mathrm{BC}$, ..., les angles L, M, N étant ici des sommes d'angles, puisque la figure est plane ; nous reviendrons sur ce théorème.

En ce qui concerne les faits du n° 4, nous dirons :

Étant donnés trois points A, B, C *en ligne droite et un point* D *extérieur, si l'on écrit*

$$\frac{\overline{BC}}{p} = \frac{\overline{CA}}{q} = \frac{\overline{AB}}{r},$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{p.\overline{DA}}{\sin(DB, DC)} = \dfrac{q.\overline{DB}}{\sin(DC, DA)} = \dfrac{r.\overline{DC}}{\sin(DA, DB)}, \\ (DB, DC) + (DC, DA) + (DA, DB) = 0, \end{array}\right.$$

comme il est facile de le voir directement; *on a donc aussi*

$$p^2.\overline{DA}^2 = q^2.\overline{DB}^2 + r^2.\overline{DC}^2 + 2qr.\overline{DB}.\overline{DC} \times \cos(DB, DC), \qquad \ldots;$$

ces formules se rattachent au théorème de Statique connu sous le nom de *théorème de Leibnitz;* et il suit de là que l'on aurait la formule qui exprime $p^2.\overline{DA}^2$ en considérant le triangle DBC comme défini par (DB, DC), $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, en regardant A comme un barycentre, et en appliquant le théorème de Stewart.

6. *Démonstration.* — On pourrait démontrer le théorème II pour un angle tétraèdre, ce qui donnerait le théorème I avec λ, μ, ν; on sait d'ailleurs que, dans un tétraèdre, les quantités l, m, n sont proportionnelles aux quantités λ, μ, ν. Nous suivrons une autre marche : nous démontrerons le théorème III pour un quadrangle plan, et nous en déduirons le théorème I; nous remarquerons, à ce propos, que si les quatre points A, B, C, D du théorème I sont dans un même plan, on obtient le théorème III pour un quadrangle plan.

Soit donc A, B, C, D un quadrangle plan. Si l'on prend une direction origine $x'x$, et si l'on pose (théorie des équipollences)

$$\overline{AB} = \overline{AB}[\cos(x, AB) + i\sin(x, AB)], \qquad \ldots,$$

comme on a, avec l'origine D, $\overline{BC} = \overline{DC} - \overline{DB}, \ldots,$ l'identité d'Euler donne la formule connue

$$\overline{DA}.\overline{BC} + \overline{DB}.\overline{CA} + \overline{DC}.\overline{AB} = 0.$$

Bellavitis, qui a donné cette équipollence, n'en a développé les conséquences que dans des cas particuliers; d'une manière générale on a

$$\overline{DA}.\overline{BC} = \overline{DA}.\overline{BC}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \ldots,$$

les arguments α, β, γ étant respectivement

$$(x, DA) + (x, BC), \quad (x, DB) + (x, CA), \quad (x, DC) + (x, AB);$$

les vecteurs $\frac{\overline{DA}.\overline{BC}}{k}$, $\frac{\overline{DB}.\overline{CA}}{k}$, $\frac{\overline{DC}.\overline{AB}}{k}$ font donc entre eux les angles

$$(DB, DC) + (AC, AB \quad \text{ou} \quad (BD, BA) + (CA, CD), \qquad \ldots,$$

et comme leur somme est nulle, on a ce théorème que l'on peut regarder comme une extension du théorème de Ptolémée : *Dans un quadrangle plan, les produits*

$$l = \overline{DA} \times \overline{BC}, \qquad m = \overline{DB} \times \overline{CA}, \qquad n = \overline{DC} \times \overline{AB}$$

sont proportionnels aux côtés $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LM}$ *d'un triangle* LMN *dans lequel les angles des directions positives des côtés sont*

$$L = \widehat{DB, DC} + \widehat{AC, AB} = \widehat{BD, BA} + \widehat{CA, CD}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a les formules (3) *et* (4).

Soit alors un tétraèdre ABCD : on veut démontrer

$$\overline{DA}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 \times \overline{CA}^2 \times \overline{DC}^2 \times \overline{AB}^2$$
$$+ 2\overline{DB}.\overline{DC} \times \overline{CA}.\overline{AB} \times \cos L.$$

L étant l'angle résultant donné par la formule (1); or,

en menant la hauteur DH, on a dans le quadrangle HABC

$$\overline{HA}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 \times \overline{CA}^2 + \overline{HC}^2 \times \overline{AB}^2$$
$$+ 2\overline{HB}.\overline{HC} \times \overline{CA}.\overline{AB} \times \cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB});$$

on retranche, on transpose, on divise par $2\overline{CA}.\overline{AB}$, et l'on doit démontrer que l'on a

$$\overline{DH}^2 \frac{\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{CA}.\overline{AB}}$$
$$= \overline{DB}.\overline{DC} \cos L - \overline{HB}.\overline{HC} \cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB})$$

ou

$$\overline{DH}^2 \cos \widehat{AC, AB}$$
$$= \overline{DB}.\overline{DC} \cos L - \overline{HB}.\overline{HC} \cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB});$$

cela devient, les sens positifs étant DH, DB, DC, HB, HC,

$$\cos L = \cos \widehat{DH, DB} \cos \widehat{DH, DC} \cos \widehat{AC, AB}$$
$$+ \sin \widehat{DH, DB} \sin \widehat{DH, DC} \cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB}),$$

ou, en développant le dernier cosinus et en rapprochant les deux termes en $\cos \widehat{AC, AB}$,

$$\cos L = \begin{pmatrix} \cos \widehat{DH, DB} \cos \widehat{DH, DC} \\ + \sin \widehat{DH, DB} \sin \widehat{DH, DC} \cos \widehat{HB, HC} \end{pmatrix} \cos \widehat{AC, AB}$$
$$- \sin \widehat{DH, DB} \sin \widehat{DH, DC} \sin \widehat{HB, HC} \sin \widehat{AC, AB}.$$

Considérons alors le trièdre DH, DB, DC : d'une part, le facteur qui multiplie $\cos \widehat{AC, AB}$ dans la formule précédente exprime la quantité $\cos \widehat{DB, DC}$; d'autre part, le facteur qui multiplie $\sin \widehat{AC, AB}$ exprime

le sinus du trièdre considéré, et cette quantité a encore pour expression

$$\sin \widehat{DB, DC} \times \sin(DH, DBC) \quad \text{ou} \quad \sin \widehat{DB, DC} \times \cos(ABC, DBC);$$

on obtient donc

$$\cos L = \cos \widehat{DB, DC} \cos \widehat{AC, AB} - \sin \widehat{DB, DC} \sin \widehat{AC, AB} \cos(DBC, ABC),$$

ce qui correspond précisément à la formule (1). Le théorème I est donc démontré.

Il serait intéressant d'établir ce théorème par la méthode des quaternions; comme il consiste, si l'on veut, en trois formules dont l'une est

$$l = m \cos N + n \cos M \qquad \text{ou} \qquad 1 = \frac{m}{l} \cos N + \frac{n}{l} \cos M,$$

si l'on observe que l'expression $\frac{m}{l} \cos N$ est la partie scalaire du produit des deux biradiales $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{CA}{CB}$, on entrevoit la possibilité d'une telle démonstration.

II.

7. Considérons spécialement les angles L, M, N définis par les formules (1), et les quantités l, m, n définies par les formules (2) : on peut avoir un tétraèdre ABCD, ou un quadrangle plan A, B, C, D, ou trois points A, B, C en ligne droite et un point D extérieur, et nous commencerons par ce dernier cas; notre but est d'étendre les formules et d'indiquer des applications des formules généralisées.

Soient d'abord deux droites de l'espace sur lesquelles se trouvent les deux divisions semblables A, B, C *et* A', B', C', et considérons les segments A'A, B'B, C'C

qui sont parallèles à un même plan R. Si l'on fait une projection oblique de la figure sur le plan R, les projetantes étant parallèles à A'B'C', les segments sont projetés en vraie grandeur en $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$, et la division $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux premières. On voit que, *si l'on connaît les trois longueurs* AA', BB', CC', *et la valeur du rapport* $\frac{BC}{CA}$, *la figure* $O'A_0B_0C_0$ *est déterminée, de sorte que les angles* (AA', BB'), . . . *le sont aussi ; en posant*

$$\frac{\overline{BC}}{p} = \frac{\overline{CA}}{q} = \frac{\overline{AB}}{r},$$

on a, d'après le n° 5,

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p.\overline{AA'}}{\sin(BB', CC')} = \dfrac{q.\overline{BB'}}{\sin(CC', AA')} = \dfrac{r.\overline{CC'}}{\sin(AA', BB')}, \\ (BB', CC') + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} p^2.\overline{AA'}^2 = q^2.\overline{BB'}^2 + r^2.\overline{CC'}^2 \\ \qquad + 2qr.\overline{BB'}.\overline{CC'} \times \cos(BB', CC'), \quad \ldots. \end{array} \right.$$

8. *Soient, en second lieu, deux triangles directement semblables* ABC *et* A'B'C' *situés dans un même plan,* et considérons les segments A'A, B'B, C'C. Si l'on emploie la notation $\overline{\overline{AB}}$ avec le même sens qu'au n° 6, on a

$$\overline{\overline{B'C'}} = \overline{\overline{BC}} \times k, \qquad \overline{\overline{C'A'}} = \overline{\overline{CA}} \times k, \qquad \ldots;$$

à cause de

$$\overline{\overline{BB'}} + \overline{\overline{B'C'}} + \overline{\overline{C'C}} + \overline{\overline{CB}} = 0,$$

ou

$$\overline{\overline{BB'}} - \overline{\overline{CC'}} = \overline{\overline{BC}} - \overline{\overline{B'C'}};$$

on en conclut

$$\overline{\overline{BB'}} - \overline{\overline{CC'}} = \overline{\overline{BC}} \times (1 - k), \qquad \ldots.$$

et il en résulte ceci : si, à partir d'un point O′, on trace les segments $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$ parallèles et égaux aux segments A′A, B′B, C′C, le triangle $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux triangles donnés; on le verrait d'ailleurs facilement par la Géométrie, en mettant, par exemple, le point O′ en A′. Dès lors, *si l'on connaît les trois longueurs* AA′, BB′, CC′, *et des quantités* p, q, r *proportionnelles aux côtés des deux triangles, la figure* $O'A_0B_0C_0$ *est déterminée, de sorte que les angles* (AA′, BB′), ... *sont déterminés; d'après le n° 6, les produits* $p\times\overline{AA'}$, $q\times\overline{BB'}$, $r\times\overline{CC'}$ *sont proportionnels aux côtés d'un triangle* LMN *dans lequel on connaît les angles des directions positives des côtés, savoir* (BB′, CC′) + (AC, AB), ..., et l'on aurait des relations métriques que nous n'écrirons pas.

On a ce théorème :

Un triangle ABC *étant donné de position dans un plan, ainsi que les longueurs* AA′ *et* BB′ *avec l'angle qu'elles forment, si l'on construit le triangle* A′B′C′ *semblable au triangle* ABC, *le lieu du point* C′ *est une circonférence de centre* C, *et la droite* CC′ *fait des angles constants avec les droites* AA′ *et* BB′.

La figure $O'A_0B_0C_0$ est en effet déterminée de grandeur; les relations dont il est parlé plus haut donneraient le rayon CC′. Lorsque les points A, B, C sont en ligne droite, on a une démonstration simple en mettant le point O′ en C′; le cas plus particulier où le point C est le milieu du segment AB a été proposé comme exercice par M. E. Bourrienne, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Vuibert (1894, question 3454).

Voici une autre solution pour le cas général :

Étant donné dans un plan un contour quadrangu-

laire $ABB'A'$, le centre de similitude S des deux segments AB et $A'B'$ est aussi celui des deux segments AA' et BB'; dès lors, les triangles ABC et $A'B'C'$ étant supposés directement semblables, si l'on construit les trois triangles directement semblables, $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, le triangle $A''B''C''$ est semblable aux deux premiers triangles; si l'on suppose $AA'' = AA'$, d'où $BB'' = BB'$, $CC'' = CC'$, on arrive au résultat cherché.

Il est intéressant de suivre la variation de la figure; les segments AA', BB', CC' peuvent être remplacés par les segments opposés AA'', BB'', CC''.

9. Relativement au théorème général, nous observerons d'abord que, si un tétraèdre ABCD varie en conservant les mêmes longueurs d'arêtes à partir de D, et une base ABC toujours semblable à elle-même, les angles résultants L, M, N sont invariables.

Soient alors, dans deux plans parallèles P *et* P', *deux triangles semblables* ABC, $A'B'C'$, et considérons les segments $A'A$, $B'B$, $C'C$: si, à partir d'un point O', on prend les segments $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$ parallèles et égaux aux segments $A'A$, $B'B$, $C'C$, le triangle $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux triangles donnés; pour ramener ce cas au précédent (n° 8), on peut prendre le point O' dans le plan P', ce qui donne le triangle $A_0B_0C_0$ dans le plan P, et projeter cylindriquement le triangle $A'B'C'$ et le point O' sur le plan P.

Dès lors, *si l'on connaît les trois longueurs* AA', BB', CC', *et des quantités* p, q, r *proportionnelles aux côtés des deux triangles donnés, le tétraèdre* $O'A_0B_0C_0$ *n'est pas déterminé, il est vrai, mais, d'après la remarque ci-dessus, les angles résultants*

$$L = [(BB', CC') + (AC, AB)], \qquad \ldots$$

sont déterminés avec une somme nulle, et les produits

p $\times$ AA′, *q* $\times$ BB′, *r* $\times$ CC′ *sont proportionnels aux côtés d'un triangle* LMN *dans lequel les angles des directions positives des côtés sont ces mêmes angles résultants;* on aurait des relations métriques.

Voici une conséquence de la remarque faite au début de ce numéro.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1897), M. Raoul Bricard a donné ce théorème : « Les deux cercles C et C′, situés dans des plans parallèles, étant supposés rigides, si l'on réunit deux à deux leurs points homologues par des tiges rigides, articulées en ces points, le système obtenu est déformable, et les plans des cercles restent parallèles pendant la déformation. » Considérons alors deux tiges AA′ et BB′ : si nous prenons une troisième tige quelconque CC′, laquelle donne lieu à un angle (CB, CA) qui ne dépend que du système des deux premières tiges, *l'angle résultant indiqué par la notation* [(AA′, BB′) + (CB, CA)] *reste constant pendant la déformation ;* on considère le tétraèdre $O'A_0B_0C_0$ obtenu comme il a été dit.

NOTE DU RÉDACTEUR.

Le théorème par lequel M. Fontené, dans l'article qui précède, a étendu à l'espace le théorème de Bellavitis sur le quadrangle plan, est susceptible d'une démonstration vectorielle. Il s'agit du théorème I. La démonstration suivante n'est pas celle à laquelle l'Auteur fait allusion à la fin du n° 7; il m'a paru plus facile d'établir les formules (4) du n° 1.

Soient A, B, C, A′, B′, C′ les vecteurs BC, CA, AB, DA, DB, DC dans le tétraèdre ABCD; *a*, *b*, *c*, ... seront les longueurs de ces vecteurs.

Le triangle LMN de l'énoncé a pour côtés *aa*′, *bb*′, *cc*′; les

cosinus de ses angles seront donc

$$\frac{b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2}{2bcb'c'} \quad \ldots;$$

d'autre part, l'angle résultant défini par l'énoncé est celui du rapport géométrique $\frac{B}{C} \cdot \frac{B'}{C'}$, comme on le voit aisément, ou $\frac{1}{c^2 c'^2} \cdot C.B.C'.B'$; tout se réduit donc à étudier l'angle de $C.B.C'.B'$, donnée par

$$\frac{S\,C.B.C'.B'}{cbc'b'} = \cos\alpha.$$

Or on a

$$\begin{aligned} C.B.C'.B' &= C.B(A'+B)(A'+C) \\ &= C.B.A'^2 + C.B.A'\,C + C.B^2.A' + C.B^2.C, \end{aligned}$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S(C.B.C'.B') = &- a'^2 S(C.B) - c^2 S(B.A') \\ &- b^2 S(C.A') + b^2 c^2, \end{aligned} \right.$$

à cause de la formule connue

$$\begin{aligned} S(P.Q.R.T) = S(P.Q)S(R.T) &- S(P.R)S(Q.T) \\ &+ S(P.T)S(Q.R), \end{aligned}$$

qui réduit $S(C.B.A'.C)$ à $C^2 S(B.A')$ ou $-c^2 S(B.A')$.

Mais l'inspection de la figure donne

$$S(C.B) = -\frac{b^2 - c^2 - a^2}{2}, \qquad S(B.A') = \frac{b^2 + a'^2 - c'^2}{2},$$

$$S(C.A') = \frac{c^2 + a'^2 - b'^2}{2}.$$

On a donc

$$S(C.B.C'.B') = \frac{b^2 b'^2 + c^2 c'^2 - a^2 a'^2}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

On en déduit les théorèmes sphériques II, III, IV, les théorèmes plans analogues, et les conséquences de ces théorèmes plans données dans la seconde Partie. C.-A. Laisant.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1899;

Solution par M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. *Indiquer comment sont situées par rapport au système $Oxyz$ des axes de coordonnées rectangulaires les droites A et B qui ont pour équations*

(A) $$z = 2, \qquad y + x = 0,$$

(B) $$z = -2, \qquad y - x = 0.$$

Chercher le lieu des centres S *des sphères tangentes à la fois aux droites* A *et* B. *Ce lieu est une surface* [S] : *la reconnaître et donner ses génératrices rectilignes.*

II. *Constater sur l'équation de* [S] *que* Ox, Oy, Oz *sont des axes de symétrie de cette surface, et montrer que ce résultat pouvait être prévu par la seule connaissance des données du problème.*

III. *De chaque point* x, y, z *de* [S], *on déduit un point* M, *en diminuant l'ordonnée* y *de* $\frac{27}{(2x+1)^2}$.

Écrire l'équation de la surface [M] *ainsi déduite de* [S], *et trouver les droites de la surface.*

IV. *Étudier la forme et les transformations successives des sections de la surface* [M] *par des plans perpendiculaires à* Oz, *et, en particulier, les sections faites par les plans* $z = 0$ *et* $z = 1$, *cette dernière aussi complètement que possible.*

I. Les droites B et A sont les parallèles menées par

les points de l'axe Oz, de cotes -2 et $+2$, respectivement à la bissectrice de l'angle xOy et à celle de son supplément.

Les distances du point S aux droites A et B étant égales, on a immédiatement

$$(z-2)^2+\frac{(y+x)^2}{2}=(z+2)^2+\frac{(y-x)^2}{2}$$

ou

$$(1)\qquad xy=4z,$$

qui est l'équation du lieu [S] demandé.

Cette équation représente un paraboloïde hyperbolique équilatère ayant pour sommet l'origine, pour plan tangent en ce point le plan Oxy, et pour plans directeurs les plans Oxz et Oyz. Ses deux systèmes de génératrices rectilignes ont pour équations respectivement

$$\begin{cases} x=\lambda,\\ \lambda y=4z,\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\begin{cases} y=\mu,\\ \mu x=4z.\end{cases}$$

II. Il suffit de remarquer que l'on peut, dans l'équation (1), changer simultanément le signe de deux des coordonnées courantes, pour en conclure que la surface admet les trois axes de coordonnées comme axes de symétrie.

Géométriquement, on peut le voir ainsi :

D'une part, l'axe Oz se confond avec l'axe du paraboloïde et, d'autre part, dans chaque système de génératrices rectilignes, l'un des axes, Ox ou Oy, joue le rôle d'axe de symétrie, puisque ces génératrices le rencontrent et lui sont perpendiculaires.

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, attendu que les données sont symétriques par rapport aux trois axes, chacune des droites A et B étant à elle-même sa propre symétrique par rapport à Oz, et ces deux droites

étant symétriques l'une de l'autre par rapport soit à Ox, soit à Oy.

III. L'équation (1) pouvant s'écrire

$$y = \frac{4z}{x},$$

celle de la surface [M] sera

$$(2)\qquad y = \frac{4z}{x} - \frac{27}{(2x+1)^2}$$

ou

$$(2)\qquad x[(2x-1)^2 y + 27] = 4z(2x+1)^2.$$

Si cette surface du quatrième degré possède des génératrices rectilignes, celles-ci seront nécessairement parallèles à des génératrices du cône des directions asymptotiques ayant pour sommet l'origine. Or celui-ci a pour équation

$$x^3 y = 0,$$

c'est-à-dire qu'il se décompose en deux plans : Oyz, pris triplement, et Oxz. Il ne saurait donc y avoir de génératrices de la surface que dans des plans parallèles à l'un ou à l'autre de ces plans de coordonnées.

Si nous coupons la surface par un plan parallèle à Oyz, il la rencontre déjà suivant une droite triple à l'infini. Le reste de l'intersection se réduit donc à une droite. Les équations de cette droite sont, en effet, si l'on se reporte à (2),

$$x = \lambda,$$

$$y = \frac{4z}{\lambda} - \frac{27}{(2\lambda-1)^2}.$$

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, attendu que, la transformation consistant à réduire toutes les

abscisses égales d'une même quantité, une génératrice du premier système du paraboloïde [S], dont toutes les abscisses sont égales, doit se transformer en une droite.

La surface [M] du quatrième ordre, possédant ainsi un système infini de génératrices rectilignes, ne saurait, comme on sait, en posséder un second; elle ne saurait même pas, en dehors de ce système, posséder de génératrices isolées. Celles-ci, d'après ce qu'on vient de voir, seraient, en effet, parallèles au plan Oxz. Or, si l'on coupe la surface par un plan parallèle à celui-ci, on obtient, d'après (2'), en outre de la droite à l'infini, la cubique dont l'équation est

$$(2x+1)^2(\mu x - 4z) + 27x = 0.$$

Cette cubique admet pour asymptotes les droites

$$2x+1=0 \qquad \text{et} \qquad \mu x - 4z = 0,$$

et si, pour une certaine valeur de μ, elle se décomposait, les équations de ses asymptotes se mettraient en facteurs dans sa propre équation, ce qui n'a jamais lieu, puisque le terme restant $27x$ est indépendant de μ.

IV. Si l'on coupe la surface [M] par le plan $z=h$, on obtient la quartique Q qui a pour équation

$$(3) \qquad (2x+1)^2(xy-4h)+27x=0,$$

et dont les asymptotes, en évidence sur l'équation même, sont les droites

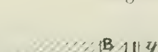
$$x=0,$$
$$y=0,$$
$$2x+1=0,$$

cette dernière étant double. Il en résulte que la quartique a un point triple à l'infini dans la direction de Oy; elle est donc unicursale.

Ces asymptotes restant les mêmes quel que soit h, toute la question revient à examiner la disposition de la courbe par rapport à ces asymptotes pour les différentes valeurs de h.

La méthode des régions, jointe à la considération des deux points où l'axe des x, asymptote, rencontre la courbe à distance finie, suffit, dans tous les cas, à fixer l'allure générale de la courbe.

Convenons tout d'abord de désigner par H l'hyperbole équilatère qui a pour équation



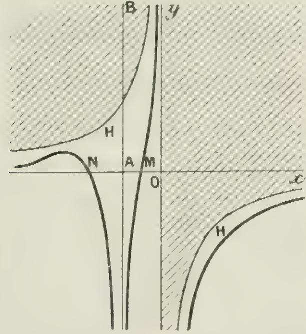
$$xy - 4h = 0,$$

et de désigner par *intérieur* de cette hyperbole la région du plan où se trouve son centre, et par *extérieur* celle où il ne se trouve pas. Cela posé, examinons les divers cas suivants :

1° $h < 0$.

L'hyperbole H a alors la disposition indiquée sur la *fig.* 1.

Fig. 1.



L'équation (3) montre que, pour tout point de la quartique Q, le binome $xy - 4h$ doit être de signe contraire à x. Or, le binome étant positif pour le centre

de l'hyperbole confondu avec l'origine, puisque h est négatif, il reste positif dans tout l'intérieur de l'hyperbole et négatif à l'extérieur. Il en résulte que la quartique Q est à l'intérieur de H du côté des x négatifs, à l'extérieur du côté des x positifs, ce qui est indiqué sur la figure par des hachures tracées dans les régions où il n'y a pas de points de Q.

Remarquons maintenant que la quartique coupe l'axe des x aux points où les abscisses sont données par l'équation

$$(4)\qquad 16hx^2 + (16h - 27)x + 4h = 0.$$

Comme on a

$$(5)\qquad (16h - 27)^2 - (16h)^2 = 27(27 - 32h),$$

quantité positive, puisque h est négatif, il en résulte que l'équation a ses deux racines réelles. Leur somme

$$-\left(1 - \frac{27}{16h}\right)$$

étant négative, et leur produit $\frac{1}{4}$ positif, elles sont négatives et, de plus, l'une est supérieure, l'autre inférieure à leur moyenne géométrique $\frac{1}{2}$. Si donc AB est l'asymptote $2x + 1 = 0$, les points M et N où la quartique coupe Ox sont l'un entre O et A, l'autre au delà de A. La connaissance de ces deux points, jointe à celle des régions précédemment déterminées, impose à la courbe Q la forme dessinée en trait gras sur la *fig.* 1.

On voit que cette courbe présente nécessairement un maximum du côté des x négatifs au delà du point N. Peut-elle en offrir d'autres? La dérivée de l'ordonnée est, d'après (2),

$$y' = \frac{-4h}{x^2} + \frac{4 \times 27}{(2x+1)^3}.$$

Pour qu'elle s'annule, il faut que l'on ait

$$-h(2x+1)^3+27x^2=0,$$

équation du troisième degré qui donnera pour la courbe autant de tangentes horizontales qu'elle aura de racines réelles.

Or cette équation peut s'écrire

$$-h\left(\frac{2x-1}{x}\right)^3+\frac{27}{x}=0,$$

ou

$$-h\left(\frac{2x+1}{x}\right)^3+27\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)=0,$$

ou enfin, en posant $\frac{2x+1}{x}=t$,

$$(6)\qquad t^3-\frac{27}{h}t+\frac{2\times 27}{h}=0,$$

et l'on a pour cette dernière équation

$$(7)\quad 4p^3+27q^2=-4\frac{27^3}{h^3}-27\frac{4\times 27^2}{h^2}=\frac{4\times 27^3}{h^2}\left(1-\frac{1}{h}\right),$$

quantité positive, puisque h est négatif. L'équation n'a donc qu'une racine réelle à laquelle correspond la tangente horizontale déjà trouvée.

2° $h>0$.

Ici, c'est, par rapport à l'hyperbole H, la région intérieure qui est négative et la région extérieure positive. Le raisonnement employé dans le cas de h négatif montre donc que les régions où se trouve la quartique Q sont celles qui n'ont pas de hachures sur la *fig.* 2.

Pour la réalité des points de rencontre de la courbe et de son asymptote Ox, le binome caractéristique est toujours celui dont l'expression (5) a été donnée plus haut.

Comme h est maintenant positif, ce binome est posi-

tif si

$$h < \frac{27}{32}.$$

On a alors deux points de rencontre réels M et N. C'est

Fig. 2.

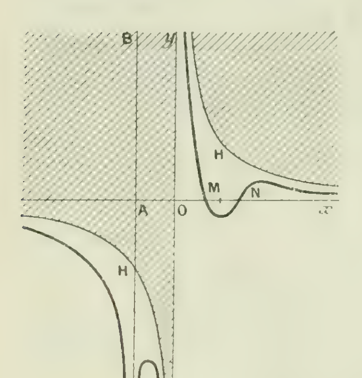
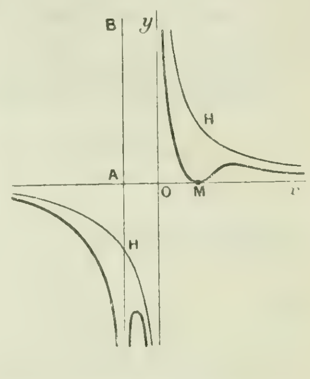


Fig. 2'.



le cas de la *fig.* 2. L'équation (4) montre d'ailleurs que le produit OM × ON est toujours égal à $\frac{1}{4}$.

Lors donc que

$$h = \frac{27}{32},$$

auquel cas les points M et N se confondent, leur abscisse est égale à $\frac{1}{2}$. C'est le cas de la *fig.* 2'.

Si l'on a

$$h > \frac{27}{32},$$

les points de rencontre avec Ox deviennent imaginaires, et l'on obtient la *fig.* 2''.

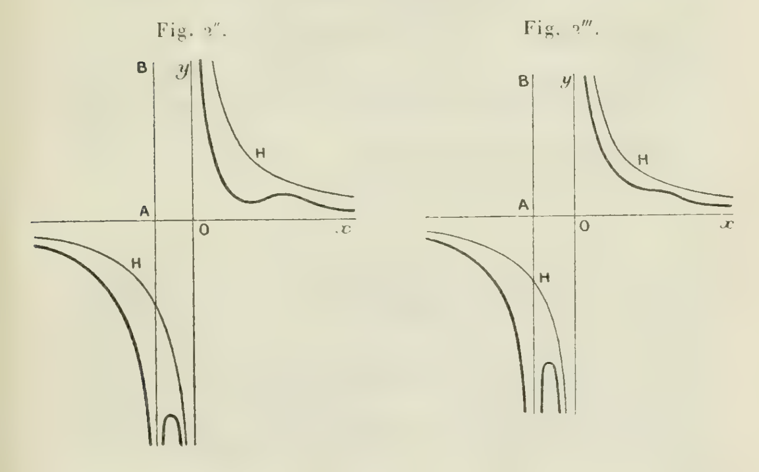
Pour ce qui est des tangentes horizontales, elles sont, comme dans le cas de $h < 0$, données par l'équation (6).

La substitution de $-x$ et o dans le premier membre de cette équation donnant les signes — et +, il y a nécessairement une tangente horizontale réelle dans l'intervalle, ou, puisque

$$x = \frac{1}{t-2},$$

entre $x = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$. C'est la tangente horizontale à la branche de courbe située entre les asymptotes Oy et AB.

Les deux autres tangentes horizontales seront réelles



si le binome caractéristique, dont l'expression (7) est donnée ci-dessus, est négatif, c'est-à-dire si $h < 1$: c'est le cas des *fig.* 2, 2' et 2''.

Si h est > 1, les deux tangentes horizontales deviennent imaginaires : c'est le cas de la *fig.* 2'''.

Lorsque ces tangentes sont réelles, il en résulte nécessairement l'existence de deux points d'inflexion, l'un entre leurs points de contact, l'autre au delà du second point de contact. Mais ces deux points d'inflexion

peuvent persister après la disparition des deux tangentes horizontales, comme le montre la *fig.* 2'''. Cherchons donc à partir de quelle valeur de h ils s'évanouissent.

En dérivant l'expression de y' écrite plus haut, nous avons

$$y'' = \frac{8h}{x^3} - \frac{8 \times 3^4}{(2x+1)^4}.$$

Les abscisses des points d'inflexion sont donc données par l'équation

$$h(2x+1)^4 - 3^4 x^3 = 0.$$

Si nous faisons encore la transformation

$$\frac{2x+1}{x} = t,$$

nous obtenons l'équation

$$(8) \qquad t^4 - \frac{3^4}{h} t + \frac{2 \times 3^4}{h} = 0.$$

Cette équation manquant des deux termes consécutifs en t^3 et en t^2 a nécessairement, en vertu d'un théorème bien connu, deux racines imaginaires. Les deux autres seront réelles tant que h n'atteindra pas la valeur pour laquelle l'équation (8) a une racine double, c'est-à-dire est satisfaite par la racine réelle de sa dérivée

$$4t^3 - \frac{3^4}{h} = 0.$$

L'élimination de t entre ces équations est des plus faciles. Si, après avoir multiplié la seconde par $\frac{t}{4}$, on la retranche de la première, on a, après suppression du facteur $\frac{3^4}{h}$,

$$-\frac{3t}{4} + 2 = 0,$$

d'où

$$t = \frac{8}{3}.$$

Il en résulte d'abord que

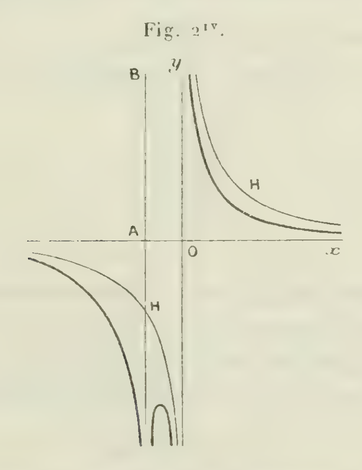
$$x = \frac{1}{\frac{8}{3} - 2} = \frac{3}{2}.$$

Telle est l'abscisse du point où viennent se confondre les deux points d'inflexion. Portant maintenant cette valeur de t dans l'équation dérivée ci-dessus, on a

$$h = \frac{3^7}{2^{11}} = 1,0678\ldots$$

A partir de cette valeur de h les deux points d'inflexion disparaissent et l'on a la forme indiquée sur la *fig.* 2^{IV}.

Fig. 2^{IV}.



Il nous reste à examiner les deux cas spéciaux prévus par l'énoncé.

3° $h = 0$.

Si, dans l'équation (3), on fait $h = 0$, cette équation se décompose en

$$y = 0$$

et

$$(2x+1)^2 y + 27 = 0,$$

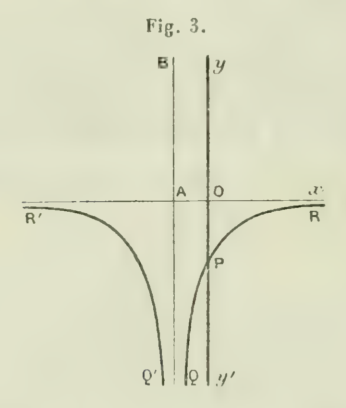
ou

$$y = \frac{-27}{(2x+1)^2}.$$

Par suite, la quartique Q se décompose en l'axe des y et la cubique unicursale dont l'équation vient d'être écrite et qui admet toujours pour asymptotes les droites Ox et AB$(x = -\frac{1}{2})$.

Cette cubique (*fig.* 3) coupe l'axe Oy au point P

Fig. 3.



dont l'ordonnée est $y = -27$. Elle est symétrique par rapport à son asymptote AB.

On peut remarquer que les ordonnées de cette cubique sont les inverses changées de signe de celles de la parabole

$$y = \frac{(2x+1)^2}{27}$$

qui admet AB pour axe et A pour sommet.

En se reportant à l'équation (2), on voit que les diverses formes de la quartique Q s'obtiennent en ajoutant aux ordonnées de cette cubique fixe celles de l'hy-

perbole variable

$$y = \frac{4h}{x},$$

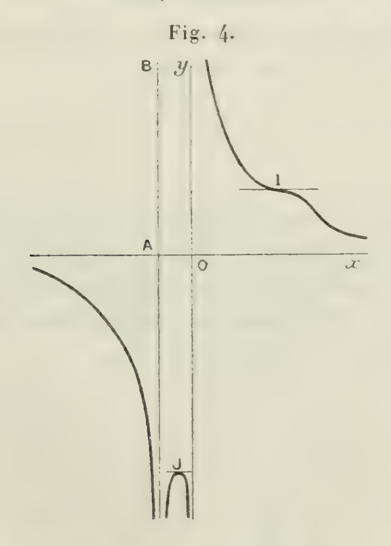
que nous avons désignée par H.

4° $h = 1$.

D'après la discussion faite pour le deuxième cas h étant ici compris entre $\frac{27}{32}$ et 1,06, la forme correspondante de la courbe appartient à l'une des variétés dessinées sur les *fig.* 2″ et 2‴. En réalité, c'est la forme de transition entre ces deux-ci, puisque ce qui les distingue l'une de l'autre, à savoir la réalité des tangentes horizontales, se modifie précisément, comme on l'a conclu de l'expression (7) du binome caractéristique, pour $h = 1$.

Ainsi, pour cette valeur de h, on a donc deux tangentes horizontales confondues, autrement dit un point d'in-

Fig. 4.



flexion à tangente horizontale. De là, la forme représentée par la *fig.* 4.

Pour déterminer les tangentes horizontales, il suffit d'ailleurs de faire $h = 1$ dans l'équation (6) qui devient alors

$$t^3 - 27t + 54 = 0$$

ou

$$(t - 3)^2(t + 6) = 0.$$

Les abscisses des points correspondants étant données par

$$x = \frac{1}{t - 2},$$

on a, pour l'abscisse du point d'inflexion I à tangente horizontale

$$x = 1,$$

et pour l'abscisse du second point J à tangente horizontale

$$x = -\frac{1}{8}.$$

Les ordonnées correspondantes sont, en vertu de l'équation (2) où l'on fait $z = 1$,

$$y = 1,$$

et

$$y = -80.$$

En résumé, la surface (M), ayant à l'infini une droite triple dans le plan Oyz et une droite simple dans le plan Oxz, est coupée par des plans de cote h par rapport au plan Oxy suivant des courbes dont la forme varie, ainsi que l'indique le Tableau suivant :

$h < 0$	*fig.* 1.
$h = 0$	*fig.* 3.
$0 < h < \frac{27}{32}$	*fig.* 2.
$h = \frac{27}{32}$	*fig.* 2',
$\frac{27}{32} < h < 1$	*fig.* 2''

$h = 1$ . . . . *fig.* 1.

$1 < h < \frac{3^7}{2^{11}}$ . . . . *fig.* $2''$,

$h > \frac{3^7}{2^{11}}$ . . . . *fig.* $2'''$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1772.

(1897, p. 340.)

Trouver le lieu des points M *tels qu'en menant à une ellipse les tangentes qui la touchent en* A *et* B, *le cercle circonscrit au triangle* MAB *soit tangent à l'ellipse.*

Même question pour la parabole. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soit donnée l'ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 \right) (y + mx + n) = 0,$$

représente une conique qui passe par les points de rencontre de (1) avec deux sécantes, dont l'une est la polaire de M (α, β). La condition pour que l'autre soit tangente à (1) et, par suite, à (2) est

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2.$$

Pour que (2) passe par M, il faut que

$$1 + \lambda(\beta + m\alpha + n) = 0.$$

Enfin (2) sera un cercle, si l'on a

$$\frac{1 + m\alpha\lambda}{a^2} = \frac{1 + \beta\lambda}{b^2}$$

et

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2} = 0.$$

En éliminant λ, m et n entre ces quatre dernières équations, on a la résultante

$$a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (a^2 - b^2)^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)$$

ou

$$(3) \qquad \rho^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2b^2}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta),$$

qui représente le lieu cherché.

Mais en multipliant (3) avec l'équation de (1) en coordonnées polaires,

$$\rho_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

on a

$$\rho\rho_1 = a^2 - b^2.$$

On en conclut que les courbes (1) et (3) sont transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

Le même calcul, appliqué à la parabole $y^2 - 2px = 0$, donne pour résultante la parabole

$$y^2 = 2p(p - x),$$

qui n'est autre que la proposée retournée du côté des x négatives, et dont le sommet est transporté au point

$$(y = 0, x = p).$$

QUESTIONS.

554. (**1860**, 464). — On a fait arriver dans un poids d'eau x, un poids p de vapeur d'eau à d degrés sous la pression de c centimètres; on a ainsi porté la température t de cette eau à la température t'; l'eau est renfermée dans un vase métallique pesant k kilogrammes et dont la chaleur spécifique est m : on demande la valeur de x.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899.

Contrairement à ce qui a été indiqué par erreur dans le numéro de juin 1899, p. 246, le concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales*.

Note de La Rédaction.

[F8fβ]

SUR LES SYSTÈMES DE TROIS RELATIONS DOUBLEMENT QUADRATIQUES ENTRE TROIS VARIABLES;

Par M. G. FONTENÉ et R. BRICARD.

On connaît les polygones de Poncelet et les recherches de MM. Hart, Kempe et Darboux sur les systèmes de quadrilatères articulés. Des recherches analogues entreprises séparément par chacun de nous (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1897 : *Extension des polygones de Poncelet*; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897 : *Théorie de l'octaèdre articulé*; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1897 : *Sur les fonctions elliptiques du second ordre*) ont abouti à un échange de vues d'où est résulté le Mémoire que nous publions aujourd'hui.

L'objet de ce Mémoire est :

1° *La recherche des conditions dans lesquelles trois relations doublement quadratiques entre trois va-*

riables

$$F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0$$

admettent une infinité de solutions, sans que la dernière soit le résultat complet de l'élimination de z entre les deux premières, F_3 devant être seulement l'un des deux facteurs du résultant, et deux cas sont à distinguer selon que les relations sont de genre *un* ou de genre *zéro;*

2° La démonstration *formelle* du fait suivant : Écrivons

$$(1) \qquad F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0,$$

$$(2) \qquad x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u).$$

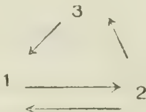
$$(2') \qquad x = \frac{P_1(u)}{Q_1(u)}, \qquad y = \frac{P_2(u)}{Q_2(u)}, \qquad z = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)},$$

$$(3) \qquad \begin{cases} A\,xyz + B_1\,yz + \ldots + C_1\,x + \ldots + D = 0, \\ A'xyz + B'_1\,yz + \ldots + C'_1\,x + \ldots + D' = 0; \end{cases}$$

les relations (1), de genre un ou de genre zéro, sont supposées compatibles de la manière indiquée ; les f sont des fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, à sommes de pôles distinctes ; les P et les Q sont des polynomes du second degré ; les relations (3) sont linéaires par rapport à chacune des variables; *nous établirons, pour le cas où le genre est un, l'équivalence des relations* (1) *supposées compatibles de la manière indiquée et des formules* (2), *l'équivalence des relations* (3) *et des relations* (1) *ou des formules* (2); *et, pour le cas où le genre est zéro, l'équivalence des relations* (1) *et des formules* (2'), *en observant qu'on a alors une seule relation de la forme* (3).

Le premier paragraphe est consacré au premier problème. Les deux paragraphes suivants se rapportent à la

dernière question; en indiquant par le signe $1 \to 2$ le passage de (1) à (2), nous établirons les passages suivants :



ce qui suffit; le second paragraphe est relatif à l'équivalence de (1) et (2), et le passage de la relation $F_1 = 0$ aux formules $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$ est établi par une méthode différente de celle que l'on trouve dans l'Ouvrage d'Halphen; dans le troisième paragraphe on établit le passage de (2) à (3), et le passage de (3) à (1) est immédiat; on pourrait, au lieu d'établir le passage de (2) à (3), établir directement l'équivalence de (1) et (3), comme dans l'article déjà cité du *Bulletin;* le passage direct de (3) à (2) par le calcul semble devoir être artificiel.

Si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées cartésiennes, les relations (1), ou les formules (2) ou (2′), ou les relations (3) quand elles ont lieu, représentent une sextique gauche à trois points doubles, de genre un ou de genre zéro, ces deux sextiques étant d'ailleurs bien différentes : nous considérerons ces sextiques. Elles forment un schéma commode pour les problèmes du genre de ceux dont il a été parlé, et l'on verra que l'on peut réduire ces schémas à ceux d'une cubique plane de genre un ou d'une cubique gauche; M. Darboux a déjà employé la cubique plane : en posant, pour un quadrilatère plan articulé ABCD,

$$x = \cos(\omega, \mathrm{AB}) + i \sin(\omega, \mathrm{AB}), \qquad \ldots,$$

où ω est un axe, on a les deux relations

$$ax + by + cz + dt = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} = 0.$$

qui sont de la forme (3) quand on regarde t comme une constante.

I.

1. Considérons trois relations doublement quadratiques indécomposables,

$$(1) \qquad F_1(y, z) = 0, \qquad F_2(z, x) = 0, \qquad F_3(x, y) = 0;$$

la première, par exemple, peut être ordonnée par rapport à z ou par rapport à y, et l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} Y'_1 z^2 + 2Y''_1 z + Y'''_1 = 0, \\ Z'_1 y^2 + 2Z''_1 y - Z'''_1 = 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Z'_2 x^2 + 2Z''_2 x + Z'''_2 = 0, \\ X'_2 z^2 + 2X''_2 z + X'''_2 = 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X'_3 y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ Y'_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{array}\right.$$

Y'_1, Y''_1, Y'''_1, par exemple, étant trois polynomes du second degré en y. Cherchons à quelles conditions ces relations admettent une infinité de solutions.

2. Il peut arriver d'abord que les trois relations se réduisent d'elles-mêmes à deux : y et z vérifiant $F_1 = 0$, les deux équations en x auront leurs deux racines communes, de sorte que $F_1 = 0$ doit être identique à

$$\frac{Y'_3}{Z'_2} = \frac{Y''_3}{Z''_2} = \frac{Y'''_3}{Z'''_2}.$$

Ce cas se produit lorsque $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont des relations homographiques entre $\frac{Y}{Y'}$ et $\frac{Z}{Z'}$, d'une part, $\frac{Z}{Z'}$ et $\frac{X}{X'}$, d'autre part, X et X', par exemple, étant des polynomes du second degré en x, auquel cas l'élimination de $\frac{Z}{Z'}$ donne une relation de même forme entre

$\frac{X}{X'}$ et $\frac{Y}{Y'}$; on peut ramener les relations à la forme simple

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'},$$

dont les 14 paramètres apparents se réduisent facilement à 12 paramètres effectifs; une transformation homographique permet même de réduire ces relations à des relations homographiques entre x^2, y^2, z^2. Nous écarterons ce cas.

3. Une relation doublement quadratique $F_1(y, z) = 0$, non décomposable, peut s'écrire

$$(Z'_1 y + Z''_1)^2 - \mathfrak{Z}_1 = 0, \qquad y = \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{Z}_1}}{Z'_1},$$

$\mathfrak{Z}_1$ étant un polynome du quatrième degré en z, non carré parfait, et pouvant se réduire accidentellement à un degré moindre. Nous appellerons *valeurs critiques* de z les valeurs finies de cette variable qui donnent pour y deux valeurs égales : ce sont les quatre racines de l'équation $\mathfrak{Z}_1 = 0$;

1° Si elles sont au nombre de quatre ou de trois, et si elles sont distinctes, *la relation est de genre un*, d'après $\sqrt{\mathfrak{Z}_1}$;

2° Si l'on a $\mathfrak{Z}_1 = (C_1 z + C'_1)^2 \times Z_1$, Z_1 étant un polynome du second degré en z, *la relation est de genre zéro;* on peut suivre ces faits sur la courbe $F_1(y, z) = 0$, quartique binodale, ou cubique anodale dans le premier cas, quartique trinodale, ou cubique nodale, ou conique dans le second cas.

Les quatre valeurs critiques de y sont données par une équation $\mathfrak{Y}_1 = 0$ analogue à l'équation $\mathfrak{Z}_1 = 0$. Le rapport anharmonique des y critiques pris dans un certain ordre est égal à celui des z critiques pris dans un

ordre convenable; si un z critique est double, un y critique est double. Pour établir ce fait, on peut observer qu'une substitution homographique (trois paramètres) effectuée sur l'une des variables permet de transformer la relation donnée en une relation symétrique (trois conditions), comme on le voit d'ailleurs dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, t. II, Chap. IX; on peut encore remarquer que des substitutions homographiques effectuées sur les deux variables permettent de faire que zéro et l'infini soient critiques pour y, critiques pour z, ce qui réduit la vérification à un calcul très simple, la relation prenant la forme

$$(Ayz + By - Cz + D)^2 - 4yz = 0;$$

un calcul moins simple se trouve dans le *Traité des courbes planes* de Salmon, à propos des quartiques binodales : on fait disparaître les termes du troisième degré.

Théorème. — *Étant données deux relations doublement quadratiques* $F_1(y, z) = 0$, $F_2(z, x) = 0$, *indécomposables, les conditions pour que la relation entre x et y qui en résulte se décompose en deux relations* $F_3(x, y) = 0$, $\Phi_3(x, y) = 0$, *qui seront doublement quadratiques, sont les suivantes :*

1° *Si l'une des relations est de genre un, l'autre doit être aussi de genre un, et les quatre valeurs critiques de la variable commune z doivent être les mêmes dans les deux relations;*

2° *Si l'une des relations est de genre zéro, l'autre doit être aussi de genre zéro, et, après qu'on a écarté la valeur critique double de z qui existe dans chacune des deux relations, et qui n'est pas astreinte à être la même de part et d'autre, les deux valeurs critiques*

restantes de cette variable z doivent être les mêmes dans les deux relations; la valeur critique double peut d'ailleurs manquer dans l'une des relations, ou dans les deux.

La décomposition demandée étant supposée avoir lieu, si l'on considère des valeurs de y et de z vérifiant $F_1 = 0$, on a pour x deux valeurs algébriquement séparables (dont l'une, par exemple, est la racine commune aux deux équations $F_2 = 0$, $F_3 = 0$); chacune de ces deux valeurs de x est donc fonction rationnelle de y et z, en tant que y est lié à z par la relation $F_1 = 0$; les deux relations primitives étant

$$Z'_1 y^2 + 2Z''_1 y + Z'''_1 = 0,$$
$$Z'_2 x^2 + 2Z''_2 x + Z'''_2 = 0,$$

l'expression de x en z fournie par la seconde doit être une fonction rationnelle de z et de l'expression de y en z fournie par la première; comme on a

$$y = \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{z}_1}}{Z'_1}, \qquad x = \frac{-Z''_2 \pm \sqrt{\mathfrak{z}_2}}{Z'_2},$$

on doit avoir identiquement, pour une association convenable des signes,

$$\frac{-Z''_2 \pm \sqrt{\mathfrak{z}_2}}{Z'_2} = R\left(z, \frac{-Z''_1 \pm \sqrt{\mathfrak{z}_1}}{Z'_1}\right),$$

$R(z, y)$ étant une fonction rationnelle; le produit $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2$ doit donc être un carré parfait, d'où il suit que les conditions du théorème sont nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes :

1° Si $\mathfrak{z}_1$ est un polynome du quatrième ou du troisième degré sans facteur carré, on peut supposer $\mathfrak{z}_2$ identique à $\mathfrak{z}_1$, et écrire, en supprimant l'indice de $\mathfrak{z}$,

$$(Z'_1 y + Z''_1)^2 - \mathfrak{z} = 0, \qquad (Z'_2 x + Z''_2)^2 - \mathfrak{z} = 0,$$

d'où l'on déduit, pour une même valeur de z,

$$Z'_1 y + Z''_1 \pm (Z'_2 x + Z''_2) = 0;$$

cela entraîne la décomposition indiquée, une valeur de y donnant deux valeurs de x, et inversement, lorsqu'on a choisi l'un des deux signes.

2° Si $\mathfrak{Z}_1$ est de la forme $(C_1 z + C'_1)^2 \times Z$, $\mathfrak{Z}_2$ est par hypothèse de la forme $(C_2 z + C'_2)^2 \times Z$, et l'on obtient

$$\frac{Z'_1 y + Z''_1}{C_1 z + C'_1} \pm \frac{Z'_2 x + Z''_2}{C_2 z + C'_2} = 0,$$

ce qui entraîne encore la décomposition cherchée.

On doit observer que, dans un cas comme dans l'autre, le système des deux relations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ doit satisfaire à quatre conditions, de sorte qu'il reste 12 paramètres; mais *les deux cas sont très différents l'un de l'autre,* les polynomes $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{Z}_2$ étant identiques dans le premier cas, et ne l'étant généralement pas dans le second puisque la valeur critique double de z n'est pas la même pour les deux relations : le second cas ne se rattache au premier que si cette valeur critique double devient la même dans les deux relations, ce qui supprime un paramètre.

4. Quand la décomposition précédente a lieu, si l'on désigne par $F_3(x, y) = 0$ l'une des deux relations fournies par l'élimination de z, on a un système (1) satisfaisant aux conditions requises. En cherchant à définir simplement la relation $F_3 = 0$, on peut dire :

Corollaire I. — *Étant données trois relations doublement quadratiques* (1), *dont l'une est de genre* un, *les conditions pour qu'elles admettent une infinité de solutions, avec un x unique pour y et z vérifiant* $F_1 = 0$, ..., *sont les suivantes : les trois relations*

doivent être de genre un, les quatre valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables doivent être critiques pour la troisième, ce qui fait onze conditions et non douze (à cause de l'égalité de rapports anharmoniques dont on a parlé), et il faut encore une condition. Il reste 12 *paramètres. La recherche de la dernière condition paraît difficile; un cas particulier est donné dans l'article cité des* Nouvelles Annales.

Corollaire II. — *Si l'une des relations* (1) *est de genre zéro, les trois relations doivent être de genre zéro (trois conditions), les deux valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables doivent être critiques pour la troisième, ce qui fait six conditions, et il faut encore trois conditions. Il reste* 12 *paramètres.*

5. Avec des coordonnées cartésiennes, les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ représentent en général une courbe gauche du douzième ordre, plus la droite à l'infini du plan des xy prise quatre fois; il peut arriver (n° 2) que la projection de cette courbe sur le plan des xy ait une équation de la forme $F_3 = 0$. Dans les conditions indiquées au n° 3, cette courbe se décompose en deux sextiques gauches, dont l'une est représentée par les trois équations (1) : *cette sextique gauche a pour points doubles les points à l'infini* A, B, C, *sur les axes, et elle dépend de* 12 *paramètres, les points doubles étant donnés; elle peut être de genre un ou de genre zéro, ce qui forme deux cas très distincts;* la sextique de genre zéro ne devient un cas particulier de la sextique de genre un que si la valeur critique double de z est la même dans F_1 et F_2; elle a alors un point double, géné-

ralement nodal, et qui peut être cuspidal. Réciproquement, toute sextique gauche à trois points doubles A, B, C, ces points doubles étant à l'infini sur les axes, est représentée par trois équations telles que (1) : le cylindre projetant pour la direction OA, par exemple, est, en effet, d'ordre 6 — 2, puisque A est un point double de la courbe, etc.

II.

6. Considérons les formules

$$(2) \qquad x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u),$$

$$(2') \qquad x = \frac{P_1(u)}{Q_1(u)}, \qquad y = \frac{P_2(u)}{Q_2(u)}, \qquad z = \frac{P_3(u)}{Q_3(u)};$$

les f sont des fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, à sommes de pôles distinctes, et les 14 paramètres apparents des formules (2) se réduisent à 12 paramètres effectifs par la substitution de $mu + n$ à u; les P et les Q sont des polynomes du second degré, et les 15 paramètres apparents des formules (2′) se réduisent à 12 par une substitution homographique. Les formules (2) ou (2′) considérées en elles-mêmes représentent la sextique à trois points doubles A, B, C, de genre un ou de genre zéro; une sextique à trois points doubles est d'ailleurs de genre un ou de genre zéro, comme il résulte de ce qu'on a dit à la fin du n° 5 : comme la sextique générale de genre un ou zéro dépend de 24 paramètres, ainsi qu'on le voit par la représentation paramétrique, une sextique à trois points doubles dépend de 21 paramètres, et il en reste 12 si l'on donne les points doubles.

7. Pour montrer l'équivalence de (1) et (2), nous rappellerons d'abord des faits connus, que nous établi-

rons en généralisant l'emploi de la méthode donnée dans l'Ouvrage d'Halphen pour le cas où la relation $F_1 = 0$ est symétrique. Deux fonctions elliptiques du second ordre d'un même argument, $f_2(u)$ et $f_3(u)$, aux mêmes périodes, les sommes de pôles étant distinctes, sont liées par une relation doublement quadratique de genre *un*, qui reste inaltérée quand on change u en $mu + n$; les nombres de paramètres font prévoir la réciproque. L'équation différentielle relative à $F_1(y, z)$, soit

$$(Z'_1 y + Z''_1)dy + (Y'_1 z + Y''_1)dz = 0,$$

devient, avec des signes convenables des radicaux,

$$\frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}_1}} = \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}_1}};$$

on peut donc écrire

$$\frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}_1}} = h\,du, \qquad \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}_1}} = k\,du,$$

et l'on a $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$, f_2 et f_3 étant des fonctions elliptiques du second ordre; comme, d'ailleurs, les racines des deux polynomes $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ sont équianharmoniques, de sorte que ces polynomes ont même invariant absolu, le rapport des périodes est le même pour les deux fonctions, et, en disposant de $\frac{k}{h}$, on peut faire que ces deux fonctions aient les mêmes périodes. Il reste un facteur arbitraire h, et deux constantes d'intégration dont l'une dépend de l'autre par la condition que $y = f_2(u)$ et $z = f_3(u)$ satisfassent à la relation $F_1 = 0$ non différentiée; cela revient à dire que l'on peut remplacer u par $mu + n$ comme on l'a déjà dit. Un z critique est un z qui donne pour u deux valeurs égales aux périodes près. (La relation entre l'invariant absolu de

l'équation différentielle et le rapport des périodes est bien connue pour la fonction pu, ce qui suffit à l'établir d'une manière générale : pour pu, on la trouve, par exemple, dans l'*Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques,* de M. Ch. Henry; la méthode d'Halphen, pour l'équation dissymétrique $F_1 = 0$, est indépendante de cette relation, et en fournit par suite une démonstration indirecte : on se donne $\mathfrak{Y}_1$ et $\mathfrak{Z}_1$ ayant même invariant absolu, on considère la relation correspondante $F_1(y, z) = 0$, etc.).

Cela posé, le passage de (2) à (1) est immédiat. Le passage inverse, quand les relations (1) sont de genre un, se fait en écrivant

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{X}}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{Y}}} = \frac{dz}{\sqrt{\mathfrak{Z}}}.$$

8. En partant d'une relation $F_1 = 0$ de genre zéro, la marche précédente donne pour y et z des formules *réductibles* à la forme suivante :

$$y = \beta \frac{\sin\left(\frac{u}{2} - b\right)\sin\left(\frac{u}{2} - b'\right)}{\sin\left(\frac{u}{2} - b''\right)\sin\left(\frac{u}{2} - b'''\right)} \qquad b'' + b''' = b + b',$$

avec 8 paramètres que la substitution de $u +$ const. à u réduit à 7; cette forme de la réponse est un cas singulier de celle relative au cas où la relation $F_1 = 0$ est de genre un. Mais le cas où les trois relations (1), supposées de genre zéro, admettent une infinité de solutions, ne rentre pas dans le cas des relations de genre un, et la réponse aux relations (1) n'est pas fournie par trois formules analogues à la précédente. En posant $\operatorname{tang}\frac{u}{2} = U$, on arrive aux formules (2'), lesquelles, *a priori*, conviennent à ce cas.

Dans le cas singulier où la sextique de genre zéro, ayant un point double, rentre dans la sextique de genre un, on a

$$\frac{dx}{A(x-\alpha)\sqrt{X}} = \frac{dy}{B(y-\beta)\sqrt{Y}} = \frac{dz}{C(z-\gamma)\sqrt{Z}},$$

et l'on a alors trois formules telles que la formule ci-dessus, avec 11 paramètres; le point double est le point (α, β, γ). Si le point double est cuspidal, on a les mêmes formules avec $\frac{u}{2} - b$ au lieu de $\sin\left(\frac{u}{2} - b\right)$, .. c'est-à-dire que, dans les formules $(2')$, la somme des racines de Q_i est alors égale à la somme des racines de P_i.

III.

9. Arrivons aux relations

$$(3)\quad \begin{cases} A\,xyz + B_1\,yz + \ldots + C_1\,x + \ldots + D = 0, & \text{ou} \quad S = 0, \\ A'xyz + B'_1\,yz + \ldots + C'_1\,x + \ldots + D' = 0, & \text{ou} \quad S' = 0, \end{cases}$$

dont les 14 paramètres apparents se réduisent à 12 parce que l'on peut prendre $S + \lambda S' = 0$, $S + \mu S' = 0$, ce qui permet de supprimer le terme en xyz dans l'une des relations et le terme indépendant dans l'autre : nous établirons le passage de (2) à (3); pour le cas où les relations (1) sont de genre zéro, ce qui donne les formules $(2')$, on aura encore *une* relation (3). Nous considérerons d'abord les relations (3) en elles-mêmes.

Une surface du troisième ordre S, ayant pour points doubles les points à l'infini A, B, C, contenant par suite les droites BC, CA, AB, est représentée par une équation (3). Deux surfaces de cette nature ont pour intersection incomplète une sextique gauche par laquelle passent toutes les surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$; cette sextique est en particulier sur une quadrique,

dont les génératrices sont les droites qui rencontrent la sextique en trois points; elle a pour points doubles les points A, B, C.

Le théorème de Lamé sur l'existence d'un huitième point commun aux quadriques qui passent par 7 points tient à ceci : une quadrique dépend de 9 paramètres, et trois quadriques ont 9 — 1 ou 8 points communs; on prend alors 9 — 2 ou 7 points. On a ici des surfaces S qui dépendent de 7 paramètres, et trois de ces surfaces ont 7 — 1 ou 6 points communs (en négligeant les droites à l'infini), puisque deux d'entre elles ont pour intersection une sextique ayant les points A, B, C pour points doubles, de sorte que la troisième donne 18 points d'intersection dont 4 sont confondus en A, 4 en B, 4 en C, ce qui laisse 6 points d'intersection à distance finie. Dès lors, *si l'on assujettit la surface à passer par 5 points donnés,* comme elle dépend encore de 2 paramètres, son équation sera de la forme

$$S + \lambda S' + \mu S'' = 0,$$

et elle passera par le sixième point commun aux trois surfaces S, S′, S″. Il serait intéressant de construire ce sixième point, connaissant d'ailleurs les directions qui fixent les trois points doubles A, B, C.

Si l'on considère la sextique qui est la courbe commune aux surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$, *cinq points de cette courbe en déterminent un sixième,* qui est le dernier point commun aux surfaces du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, passant par ces cinq points. Les surfaces du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, qui passent par six points de la sextique ne formant pas un système, contiennent la sextique, et forment le faisceau $S + \lambda S' = 0$.

10. Montrons maintenant que la sextique (2), c'est-à-dire la sextique à trois points doubles de genre un, est identique à celle considérée ici, ce qui établira le passage de (2) à (3). Cette sextique (2) admettant les points A, B, C comme points doubles, une surface du troisième ordre, à trois points doubles A, B, C, la rencontre en six points distincts des points A, B, C; les arguments de ces six points sont donnés par l'équation

$$A f_1 f_2 f_3 + B f_2 f_3 + \ldots + E f_1 + \ldots + H = 0,$$

dont le premier membre est une fonction elliptique du sixième ordre; ces arguments ont une somme constante, quelle que soit la surface du troisième ordre considérée, de sorte que 5 des 6 points déterminent le sixième. Dès lors si l'on assujettit la surface, qui dépend de 7 paramètres, à passer par 6 points de la sextique ne formant pas un système, elle aura avec elle plus de 6 points communs distincts de A, B, C et la contiendra; elle dépendra d'ailleurs d'un paramètre, et l'on aura le faisceau $S + \lambda S' = 0$. Si les deux surfaces S et S' sont tangentes, on a la sextique nodale (ou même cuspidale) de genre zéro dont on a parlé.

11. La sextique générale à trois points doubles, de genre zéro, est sur *une* surface du troisième ordre S ayant pour points doubles les points doubles de la sextique. D'ailleurs, toute sextique est sur une surface du troisième ordre; pour une sextique à trois points doubles A, B, C, on a des surfaces du troisième ordre dépendant de 3 paramètres, ce qui explique le résultat précédent.

IV.

12. Les deux sextiques gauches à trois points doubles A, B, C, de genre un et de genre zéro, *comprennent*

comme cas particuliers les deux quartiques gauches, biquadratique gauche et quartique gauche de seconde espèce, passant en A, B, C. (On sait que la quartique gauche de seconde espèce est l'intersection d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre contenant deux génératrices d'un même système de la quadrique; le cône qui a pour sommet un point de la courbe, et pour directrice la courbe, est un cône du troisième ordre ayant pour droite double une génératrice de la quadrique appartenant au système précédent.) Avec les relations (1), le terme en y^2z^2 manque pour $F_1, \ldots$: les projections sont des cubiques anodales ou nodales, résultat conforme à ce qui précède. Avec les formules (2) et (2′), il suffit de supposer que les trois fonctions f ont un pôle commun, ou que les trois polynomes Q ont une racine commune. Avec les relations (3), il faut faire $A = 0$, $A' = 0$; pour la quartique de genre zéro, on obtient *une* quadrique passant par la courbe : les génératrices du système indiqué plus haut sont les droites qui rencontrent la courbe en trois points; cette quadrique est d'ailleurs l'enveloppe des plans qui coupent la courbe en quatre points équianharmoniques (Laguerre, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, p. 420); *a priori*, toute quartique gauche est sur une quadrique. La sextique nodale ou cuspidale donne la quartique nodale ou cuspidale.

Pour la cubique gauche dont les points à l'infini sont sur les axes, les projections (1) sont des coniques; les formules (2′) se réduisent à $x = A\dfrac{u-a'}{u-a}, \cdots$; les surfaces (3) sont des quadriques en nombre doublement infini.

13. *Les deux sextiques considérées comprennent*

encore, comme cas particuliers remarquables, la cubique plane de genre un dont les points à l'infini sont dans les plans de coordonnées, et la cubique gauche dans les mêmes conditions. Avec les formules (2) ou (2'), il suffit de supposer que les trois fonctions f ont deux à deux un pôle commun, ou que les trois polynomes Q ont deux à deux une racine commune; dans le premier cas on a les formules

$$x = \mathrm{A}\frac{\sigma(u-a')\sigma(u-a'')}{\sigma(u-b)\sigma(u-c)}, \quad y = \mathrm{B}\frac{\sigma(u-b')\sigma(u-b'')}{\sigma(u-c)\sigma(u-a)}, \ldots,$$

et l'on vérifie aisément que les points à l'infini sont en ligne droite, ce qui vérifie le fait que la courbe est plane, en s'assurant que les trois relations par lesquelles on exprime qu'un plan contient ces trois points se réduisent à deux : on se sert des relations $a' + a'' = b + c, \ldots$, d'où l'on déduit $(b - a') + (c - a'') = 0, \ldots$. L'une des surfaces (3) est un plan.

14. La transformation

$$(4) \qquad xX = yY = zZ = 1,$$

qui change généralement la sextique en une courbe de même nature, la change en une quartique gauche, biquadratique gauche ou quartique de seconde espèce, quand l'origine des coordonnées est prise sur la courbe; on peut le voir sur (1), (2) ou (3).

Par un choix convenable de l'origine, la transformation (4) change la sextique de genre un en une cubique plane, la sextique de genre zéro en une cubique gauche. La courbe doit rencontrer $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$: l'origine doit être sur la seconde courbe commune aux deux cylindres $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, et sur le cylindre $F_3 = 0$. Pour une sextique de genre un, si l'on désigne par w_i

la somme des pôles de f_i, on détermine trois arguments a, b, c par les relations

$$b + c = w_1 + 2\Omega, \qquad c + a = w_2 + 2\Omega, \qquad a + b = w_3 + 2\Omega,$$

ce qui donne quatre solutions, et l'on prend comme origine O' un point dont les coordonnées sont

$$x_0 = f_1(b) = f_1(c), \qquad y_0 = f_2(c) = f_2(a), \qquad z_0 = \ldots.$$

On peut dire encore que les quatre origines O' sont les points doubles à distance finie des surfaces du faisceau $S + \lambda S' = 0$ qui ont un quatrième point double, et qui sont des surfaces corrélatives de surfaces de Steiner : on a alors, dans l'une des relations (3), $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $D = 0$, et la transformation (4) donne un plan; pour une biquadratique gauche, les quatre origines O' sont les sommets des quatre cônes du second degré qui contiennent la courbe. Si la sextique est de genre zéro, on trouve qu'il existe deux origines O', c'est-à-dire deux points tels que les trois cordes de la courbe qui passent en ce point aboutissent aux points à l'infini A, B, C.

[O5n]

UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

Par M. Henri PICCIOLI.

Soit S une surface dont les équations sont

$$x = x(uv), \qquad y = y(uv), \qquad z = z(uv),$$

quand on la rapporte à un système de coordonnées curvilignes u et v qui donne à l'élément linéaire la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

et supposons que le nombre h des points (exceptionnels) de S pour lesquels la normale correspondante est parallèle à une direction quelconque de l'espace, soit un nombre fini.

Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à S, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ les cosinus d'une direction fixe dans l'espace; nous allons chercher s'il existe sur cette surface des lignes telles qu'en chaque point le plan de la section normale tangente demeure parallèle à la direction assignée.

Observons pour cela que les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan de la section normale tangente d'une ligne quelconque L de S étant proportionnels respectivement aux différences

$$Y\,dz - Z\,dy, \qquad Z\,dx - X\,dz, \qquad X\,dy - Y\,dx,$$

où les accroissements sont pris en se déplaçant le long de L, si nous voulons que les points de L appartiennent au lieu cherché, il faudra écrire l'équation

$$\begin{aligned}&\cos a\,(Y\,dz - Z\,dy)\\ &\quad + \cos b\,(Z\,dx - X\,dz) + \cos c\,(X\,dy - Y\,dx) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$du\,\Sigma\cos a\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right) + dv\,\Sigma\cos a\left(Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0$$

Mais nous avons

$$Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

$$Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

et, par conséquent,

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{aligned}&du\,\Sigma\cos\alpha\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\ &\quad + dv\,\Sigma\cos a\left(F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0\end{aligned}\right.$$

Cette équation différentielle du premier ordre nous montre que, par rapport à une direction donnée, il existe toujours sur la surface S un système ∞^1 de lignes telles que le plan de la section normale tangente demeure parallèle à cette direction ([1]).

Il en résulte qu'un point de S sert, au moins en général, à déterminer une ligne du système, mais si en un tel point la normale à S est parallèle à la direction donnée (ce qui peut arriver au maximum h fois), comme on a

$$\cos a = X, \qquad \cos b = Y, \qquad \cos c = Z,$$

l'équation (A) est vérifiée identiquement, puisque par ce point passent toutes les lignes du système. On peut ajouter que si deux lignes Γ ont des points communs, en ces points la normale à la surface est parallèle à la direction donnée et par conséquent ce sont des points exceptionnels par rapport à cette même direction.

Pour la sphère on a $h = 2$: ces deux points exceptionnels sont les extrémités du diamètre parallèle à la direction assignée. Le système Γ correspondant est constitué de ∞^1 grands cercles passant pour ces deux points.

Il résulte de la définition de la ligne Γ que :

α. *Si parmi les lignes du système* Γ *on trouve une asymptotique de la surface, elle sera une hélice cylindrique.*

β. *Une géodésique faisant partie d'un système* Γ *est une ligne plane et par conséquent ligne de courbure.*

Remarque. — D'après l'hypothèse que nous avons posée, notre surface ne renferme pas de lignes consti-

---

([1]) Nous dirons que ces lignes forment un système Γ par rapport à cette direction.

tuées de points exceptionnels. Mais l'on voit tout de suite que, dans le cas général, si une surface contient une ligne de cette espèce, celle-ci est nécessairement une ligne de courbure plane. Dans le plan, si la direction choisie lui est perpendiculaire, toute ligne est ligne Γ et tout point est point exceptionnel. Dans le cas contraire, les lignes Γ sont des droites parallèles et il n'y a pas de points exceptionnels.

II.

Pour donner une application de ce qui précède, nous allons montrer que les asymptotiques de la surface minima de M. Enneper sont des hélices cylindriques.

Les équations de cette surface rapportée aux lignes de courbure α et β sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta, \\ z = 3(\alpha^2 - \beta^2). \end{cases}$$

Les asymptotiques ont pour équations respectives

$$\alpha + \beta = \text{const.}, \qquad \alpha - \beta = \text{const.}$$

En posant

$$\alpha = \frac{u + v}{2}, \qquad \beta = \frac{u + v}{2},$$

et en substituant dans (1) on trouve

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{u^3 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 + bu + bv}{4}, \\ y = \dfrac{v^3 - u^3 + 3uv^2 - 3u^2v - bu + bv}{4}, \\ z = buv. \end{cases}$$

qui sont des équations de la même surface rapportée à ses lignes asymptotiques u et v.

Évidemment pour démontrer que ces lignes sont des hélices cylindriques, il suffira de nous assurer qu'elles forment un système Γ par rapport à une certaine direction (même variable de ligne à ligne) : alors, d'après le théorème (β) du paragraphe précédent, la propriété dont il s'agit en résultera.

Or, si nous considérons les lignes $u =$ const., l'équation (A) correspondante peut s'écrire, en tenant compte de

$$E = G, \qquad F = 0,$$

$$\begin{aligned}&\cos a\,(3u^2 - buv - 3v^2 + b)\\ &\quad + \cos b\,(3v^2 - buv - 3u^2 - b) + 12v\cos c = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}&\lambda\,(3u^2 - buv - 3v^2 + b)\\ &\quad + \mu\,(3v^2 - buv - 3u^2 - b) + 12v = 0,\end{aligned}$$

en posant

$$\cos a = \lambda\cos c, \qquad \cos b = \mu\cos c.$$

On voit facilement que cette équation est toujours satisfaite pour les valeurs

$$\lambda = \mu = \frac{1}{u},$$

qui ne dépendent pas de v et, par conséquent, les lignes $u =$ const. forment un système Γ par rapport à la direction

$$(a)\qquad \begin{cases}\cos a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+2}},\\[2ex] \cos b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+2}}, \qquad \cos c_1 = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}.\end{cases}$$

D'une manière analogue on verra que les asymptotiques $v =$ const. forment un système Γ par rapport à la

direction

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{c^2+2}}, \\ \cos b_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{c^2-2}}, \qquad \cos c_2 = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+2}}, \end{array}\right.$$

ce qui suffit pour vérifier la propriété ènoncée ([1]).

La direction est variable de ligne à ligne : les (a) sont parallèles à un plan ω_1, les (b) à un autre plan ω_2 et ces deux plans sont orthogonaux entre eux. Une asymptotique L individualise une de ces directions : cette direction individualise à son tour un système ∞' de lignes Γ contenant L et par conséquent tout système Γ renferme une asymptotique. Si $a = 4$ chaque asymptotique contient quatre points exceptionnels.

[B7a]

SUR LE HESSIEN D'UNE FORME CUBIQUE BINAIRE;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. En appliquant aux formes cubiques binaires la remarque qui conduit à l'identité de la hessienne et de la steinerienne pour les courbes et les surfaces du troisième ordre, on obtient un résultat intéressant, et de plus le hessien de la forme cubique se présente *de lui-même* sous la forme qu'on lui donne habituellement sans en rendre compte.

Considérons le polynome du troisième degré

$$u = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d:$$

([1]) Cette propriété était déjà connue. *Voir* DARBOUX, *Leçons*, t. I, p. 318.

les indices 1 et 2 indiquant des dérivées par rapport à x et à la variable y d'homogénéité, le polynome du second degré

$$x' u_1 + u_2$$

aura une racine double x'' si l'on a simultanément

$$\begin{cases} x' u''_{11} + u''_{21} = 0, \\ x' u''_{12} + u''_{22} = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' u''_{11} + u''_{12} = 0, \\ x' u''_{21} + u''_{22} = 0. \end{cases}$$

u'' indiquant que l'on remplace x par x''; ces relations étant symétriques en x' et x'', puisqu'elles expriment que les points-racines A' et A'' sont conjugués par rapport aux points-racines de chacune des deux équations du *second degré* $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, on voit que x' et x'' peuvent être échangés. On a ainsi, en désignant par x une inconnue dont les deux valeurs sont x' et x'',

$$\begin{cases} x' x'' - x(x' + x'') + x^2 = 0, \\ ax' x'' + b(x' + x'') + c = 0, \\ bx' x'' + c(x' + x'') + d = 0, \end{cases}$$

d'où ce résultat : *En désignant par x' et x'' les deux racines de l'équation*

$$(1) \qquad \text{H} = \begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ a & b & c \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0,$$

on a

$$(2) \qquad \begin{cases} x' u_1 + u_2 = \text{A}(x - x'')^2, \\ x'' u_1 + u_2 = \text{B}(x - x')^2. \end{cases}$$

2. La raison donnée ici pour établir la symétrie qui a lieu entre x' et x'' s'applique au cas des formes cubiques à un nombre quelconque de variables : elle est plus directe que celle qui se déduit de considérations

générales relatives à une forme u d'un degré quelconque (Cf. SALMON, *Courbes planes*, n° 175).

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (SESSION DE JUILLET 1898);

SOLUTIONS PAR M. AUDIBERT.

Paris.

I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}+x-y=e^t,$$

$$(2)\qquad \frac{dy}{dt}+x-z=\cos t,$$

$$(3)\qquad \frac{dz}{dt}+x\qquad =0;$$

on mettra l'intégrale sous forme réelle.

Retranchons (2) de la somme (1) + (3); on a

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}+x-y+z=e^t-\cos t,$$

dont l'intégrale est

$$(\alpha)\qquad x-y+z=\frac{e^t}{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}+2Ce^{-t}.$$

L'élimination de $x-y$ entre (1) et (α) donne

$$\frac{dx}{dt}-z=\frac{e^t}{2}+\frac{\cos t+\sin t}{2}-2Ce^{-t}.$$

En différentiant (3) on a

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=0,$$

et de la différence de ces deux dernières relations résulte

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = -\frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2} + 2 C e^{-t},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = A \sin t + B \cos t + \frac{t}{4}(\cos t + \sin t) + C e^{-t} - \frac{e^t}{4}.$$

On en déduit

$$x = -\frac{dz}{dt} = -A \cos t + B \sin t - \frac{\cos t + \sin t}{4}$$
$$+ \frac{t}{4}(\cos t + \sin t) + C e^{-t} + \frac{e^t}{4},$$

$$y = x + \frac{dx}{dt} - e^t = (A + B) \sin t - (A - B) \cos t$$
$$+ \frac{\cos t + 3 \sin t}{4} + \frac{t}{2} \cos t - \frac{e^t}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int\int x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} \, dx \, dy$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y - 1 = 0.$$

Précisant les limites, l'intégrale peut s'écrire

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx \int_0^{1-x} y^{\frac{1}{3}} (1 - x - y)^{\frac{2}{3}} \, dy.$$

La valeur de I exprimée à l'aide des fonctions Γ est égale à

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{4}{3}).\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3})} = \frac{2^4.\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3})}{3.5.7.9};$$

mais

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}).\Gamma(\tfrac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

en vertu de la formule connue

$$\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

Il en résulte

$$I = \frac{2^5.\pi}{3.5.7.9.\sqrt{3}}.$$

Cette intégrale peut être calculée par la méthode élémentaire en posant $y = (1-x)\frac{z^3}{1+z^3}$; on a alors

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^2\,dx.3\int_0^\infty \left[\frac{dz}{(1+z^3)^2} - \frac{dz}{(1+z^3)^3}\right]$$
$$= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^2\,dx.$$

Faisant ensuite $x = u^2$,

$$I = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\int_0^1 (1-u^2)^2 u^2\,du = \frac{2^5.\pi}{3.5.7.9.\sqrt{3}}.$$

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(x+\alpha)(x^2-\alpha^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(x+\alpha)\frac{dy}{dx} + 6\alpha y = 2(x-\alpha)^3,$$

sachant qu'elle peut être vérifiée par des polynomes en x.

L'équation sera vérifiée par $y = ax^2 + bx + c$, si l'on fait $a = 1$, $b = -\alpha$, $c = \frac{2\alpha^2}{3}$.

L'intégrale générale sera donc

$$u + x^2 - \alpha x + \frac{2\alpha^2}{3},$$

u étant l'intégrale générale de l'équation privée de second membre

$$(1) \quad (x+\alpha)(x^2-\alpha^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x(x+\alpha)\frac{du}{dx} + 6\alpha u = 0.$$

Différentiant trois fois de suite, on a

$$(x+\alpha)\frac{d^5u}{dx^5} + 5\frac{d^4u}{dx^4} = 0.$$

Cette dernière équation intégrée donne

$$M = A(x+\alpha)^{-1} + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Introduisant cette valeur de u dans (1) et disposant de trois des constantes arbitraires pour qu'elle devienne une identité, on a

$$u = A(x+\alpha)^{-1} + B(x+\alpha)^3 - \frac{2A}{3\alpha}.$$

L'intégrale générale cherchée sera donc

$$y = A(x+\alpha)^{-1} + B(x+\alpha)^3 + x^2 - \alpha x + \frac{2(\alpha^3 - A)}{3\alpha}.$$

II. *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\iiint \left[(x+y+z)^2 - \frac{9a^2}{5}\right] dx\, dy\, dz$$

lorsque x, y, z prennent toutes les valeurs vérifiant les deux inégalités

$$x^2 + y^2 - 2az < 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 < 0.$$

Cet énoncé revient à dire que l'intégrale est prise à l'intérieur du solide formé par le paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = 2az$, limité par la calotte sphérique que ce paraboloïde découpe sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

En donnant d'abord à z une valeur constante, on aura à intégrer la fonction à l'intérieur d'un cercle de rayon $(2az)^{\frac{1}{2}}$, z étant compris entre o et a. Ce rayon prend la valeur $(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $a < z < a\sqrt{3}$.

L'intégrale

$$\int\int (xy + xz + yz)\,dx\,dy$$

prise à l'intérieur d'un cercle $x^2 + y^2 = f(z)$, est nulle quelle que soit la valeur attribuée à z. La fonction peut donc être simplifiée et réduite à l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \rho^2 + z^2 - \frac{9a^2}{5} = \varphi(\rho, z),$$

en faisant $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin\theta$.

On a alors à calculer l'intégrale

$$2\pi\left[\int_0^a dz \int_0^{(2az)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z)\rho\,d\rho + \int_0^{a\sqrt{3}} dz \int_a^{(3a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi(\rho, z)\rho\,d\rho\right] = -\frac{7}{30}\pi a^5.$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Dijon.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir dans le cas normal l'existence de la fonction implicite u des deux va-*

riables x, y, que définit une équation de la forme

$$f(x, y, u) = 0,$$

où f est une composante à trois places.

II. *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on demande les trajectoires orthogonales des surfaces ayant pour équation générale*

$$yz = x - a,$$

où a est un paramètre indéterminé.

Appliquer ensuite la méthode générale à la recherche inverse des trajectoires orthogonales des trajectoires qui constituent la solution de la question précédente.

Épreuve pratique. — *Évaluer l'intégrale* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^4}$ *à 0,0001 près de sa valeur.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — 1. *Mouvement curviligne d'un point pesant avec une résistance de l'air proportionnelle à la simple vitesse.*

2. *Un losange articulé* OABC *formé de quatre tiges homogènes, identiques, pesantes, est situé dans un plan vertical. L'un des sommets* O *est fixe et le sommet opposé est assujetti à décrire une verticale.*

On demande le mouvement qu'il prend lorsqu'il est abandonné à lui-même, le point A *étant le plus haut possible.*

On néglige les résistances dues au frottement.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Réfraction atmosphérique.*

Épreuve pratique. — *On demande le temps moyen d'une observation faite le* 14 *novembre* 1901 *à* $13^h 50^m 29^s,8$ *de temps vrai, à Poulkovo, dont la longitude est* $1^h 51^m 57^s,7$ *à l'est de Paris.*

Le temps moyen à midi vrai de Paris le 14 *novembre* 1901 *est* $11^h 44^m 27^s,43$ *et la variation horaire* $0^s,38$.

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Les axes étant rectangulaires, une surface est engendrée par une droite qui reste parallèle au plan* xOy, *et rencontre l'axe* Oz *et l'hélice*

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega, \qquad z = h \omega,$$

où ω *est un paramètre variable.*

On demande :

1° *De déterminer les lignes de courbure de cette surface et les rayons de courbure principaux en un point quelconque;*

2° *Étant donnée l'une de ces lignes de courbure, calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion de cette courbe en un point arbitraire;*

3° *Calculer la longueur d'un arc de cette ligne de courbure.*

On pourra prendre comme variables les coordonnées polaires du plan xOy.

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur des inté-*

grales définies

$$\int_0^\infty \frac{1-x^2}{1-x^8}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^4\left(\frac{1-x^2}{1-x^8}\right)dx.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un anneau circulaire, infiniment mince, homogène et pesant, de masse et de rayon égaux à* 3, *est mobile dans un plan vertical fixe. Il reste tangent à une droite horizontale fixe sur laquelle il glisse sans frottement. Un disque circulaire, homogène et pesant, de masse et de rayon égaux à* 1, *est tangent intérieurement à l'anneau, sur lequel il glisse sans frottement, et dont il peut se séparer.*

A l'origine du mouvement, le point de contact du disque et de l'anneau est sur la droite fixe; la vitesse du centre de l'anneau est horizontale et égale à v, *la vitesse du centre du disque a une composante horizontale égale à* $v + 4\sqrt{\frac{g(1-\lambda)}{3}}$, g *étant l'accélération due à la pesanteur et* v, λ *des paramètres donnés; enfin les rotations du disque et de l'anneau autour de leurs centres sont nulles.*

On demande de déterminer le mouvement du système. En particulier, étudier le mouvement du disque à l'intérieur de l'anneau et rechercher si le disque quitte l'anneau. Dans le cas où cette circonstance se produirait, il sera inutile de poursuivre l'étude du mouvement après que les corps se seront séparés.

Épreuve pratique. — *Un pendule composé est constitué par une plaque elliptique homogène, infiniment mince, oscillant autour d'un axe situé dans son plan.*

Comment faut-il placer l'axe dans le plan de la plaque pour que la durée des petites oscillations du pendule soit minimum?

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Lois du mouvement parabolique. Calcul d'un éphéméride. Exposer succinctement la méthode d'Albers en développant seulement la démonstration des points essentiels et les formules relatives aux principaux résultats.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère les deux étoiles α Andromède, α Orion, dont les coordonnées équatoriales sont :*

α Andromède.........	$\mathcal{A} = 0^h 2^m 32^s,75$
	$\mathcal{D} = +28°27'59'',5$
α Orion..............	$\mathcal{A} = 5^h 49^m 3^s,22$
	$\mathcal{D} = +7°23'6'',6$

On demande, par rapport à l'horizon de Montpellier :

1° *A l'instant du coucher de α Andromède, l'angle horaire, l'azimut et la distance zénithale de α Orion;*

2° *La durée de l'intervalle compris entre les couchers successifs des deux étoiles.*

Latitude de Montpellier = 43°36′44″,0.

BIBLIOGRAPHIE.

PREMIERS PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE MODERNE, par *E. Duporcq,* ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des télégraphes. 1 vol. in-8° de 160 pages; Paris, Gauthier-Villars; 1899.

Le Livre de M. Duporcq a été spécialement écrit pour les

élèves de Mathématiques spéciales, les candidats à la licence et à l'agrégation, c'est-à-dire pour les lecteurs mêmes auxquels s'adressent tout d'abord les *Nouvelles Annales*. Ajoutons immédiatement qu'il répond à un de leurs besoins les plus manifestes, et cela de la façon la plus satisfaisante.

Ce qui caractérise avant tout la méthode géométrique moderne, ce qui lui a valu sa merveilleuse fécondité, c'est l'introduction de la notion de *transformation* qui, par un mécanisme pouvant revêtir des formes particulières plus ou moins simples, permet de faire sortir systématiquement d'une proposition donnée une foule d'autres propositions tout à fait distinctes au regard de l'ancienne Géométrie.

Il a fallu, d'ailleurs, pour que cette notion ait sa pleine efficacité, qu'elle fixât ses racines dans le domaine de l'Analyse. Cela lui a permis, sans être arrêtée par aucune considération de contingence, d'étendre au langage de la Géométrie la généralité de celui de l'Algèbre. Poncelet, à qui est dû ce progrès immense, en a synthétisé la formule dans ce qu'il a appelé le *principe de continuité* au sujet duquel M. Duporcq fournit tout d'abord les explications à la fois les plus sobres et les plus précises, de façon à prévenir, dès le début, dans l'esprit du lecteur, toute espèce d'équivoque ultérieure. Il définit ensuite, sous sa forme la plus générale, la notion de transformation, en mettant en évidence le caractère spécial des transformations dites *de contact* qui embrassent, on peut le dire, toutes les transformations usuelles.

Les transformations les plus simples sont évidemment celles qui à un point font correspondre un point et, pour cette raison, sont dites *ponctuelles*, et, parmi elles, celle qui transforme les droites en droites, et qui a reçu le nom de transformation *homographique*. Son principe repose sur la considération du *rapport anharmonique* de Chasles. Aussi l'auteur commence-t-il par élucider d'une façon très complète les diverses notions qui s'y rapportent (*divisions et faisceaux homographiques, involution*), en éclairant son exposé d'exemples bien choisis, avant d'entamer l'étude de la transformation homographique générale et de ses cas particuliers.

Après les transformations ponctuelles, on est tout naturellement conduit à envisager celles qui font correspondre à un point non plus un autre point, mais une droite, qu'on nomme *dualistiques*, et parmi lesquelles la plus simple est celle qui, à des points pris sur une droite, fait correspondre

des droites concourant en un même point, et qui est dite *corrélative*. Son étude, d'après l'ordre le plus logique, suit immédiatement, dans le Livre qui nous occupe, celle de la transformation homographique.

L'homographie conservant l'ordre des courbes ou surfaces algébriques et la corrélation transformant l'ordre en la classe, on voit que l'une et l'autre appliquées à des coniques ou à des quadriques redonnent des coniques ou des quadriques, et l'on entrevoit par là tous les services qu'elles peuvent rendre dans l'étude générale de ces courbes et de ces surfaces, en vue desquelles, d'ailleurs, elles ont tout d'abord été imaginées.

En deux Chapitres substantiels M. Duporcq montre, de façon lumineuse, tout le parti qu'on en peut tirer pour cet objet. Ces deux Chapitres constituent une sorte de compendium de la théorie géométrique des coniques et des quadriques telle qu'elle peut intéresser des élèves de Mathématiques spéciales.

Dans un dernier Chapitre, l'auteur donne des notions succinctes sur diverses autres transformations géométriques et notamment sur l'*inversion* qui, après celles dont il vient d'être question, est la plus usuelle, et sur les transformations *quadratiques* dont l'inversion n'est qu'un cas particulier. Il dit enfin quelques mots de la *transformation de Lie* qui permet de transformer les droites en sphères et dont on sait l'importance capitale au point de vue de la théorie générale des surfaces en raison de la belle propriété qu'elle possède de faire correspondre aux lignes asymptotiques d'une surface les lignes de courbure de sa transformée. Ce premier aperçu élémentaire sur la transformation de Lie sera du plus grand secours à tous ceux qui devront, par la suite, en poursuivre l'étude dans le domaine de la Géométrie supérieure.

Un recueil d'exercices bien choisis complète ce petit Ouvrage, contribuant à en faire le guide le plus précieux pour les étudiants en Mathématiques spéciales qui, non contents de borner le cercle de leur curiosité scientifique aux limites des programmes officiels, voudront jeter sur l'objet de leurs études la vive clarté des principes de la Géométrie moderne. Heureuse ordonnance des matières, parfaite clarté de l'exposition, nombre et variété des exemples, tout, jusqu'au peu d'étendue du Volume, jusqu'à la commodité de son format, jusqu'à la modicité de son prix, concourt à en faire un livre vraiment

classique destiné à être avant peu entre les mains de tous les étudiants, et parmi ceux qu'ils auront à consulter le plus fréquemment et avec le plus de fruit. Et, pour tout résumer d'un mot, le meilleur éloge qu'on puisse faire de ce petit Livre c'est encore de dire que véritablement il manquait.

M. d'Ocagne.

CORRESPONDANCE.

M. **Retali**. — Le numéro de décembre 1898 des *Nouvelles Annales* (p. 579) renferme une solution fort élégante donnée par M. Servais à sa question 1716 et qui me suggère quelques observations sur la quartique circulaire dont il est question en la première Partie : le point N' est bien un point double comme M. Servais trouve, mais N n'est pas un point de rebroussement ; il est au contraire un point tacnodal où deux branches de la courbe (dont la forme rappelle celle de la courbe de Jérabek) ont entre elles un contact ordinaire ; le tacnode comptant pour deux nœuds et la tangente tacnodale pour deux tangentes doubles, la quartique est de la sixième classe et possède deux seules tangentes doubles dont une est, comme M. Servais a trouvé, la droite à l'infini ; voici la construction de l'autre bitangente : si R, S sont les extrémités du diamètre du cercle ω, perpendiculaire à NN', et si nous prenons leurs correspondants R' et S' (en la transformation quadratique de deuxième espèce), la droite R'S' est la bitangente cherchée, R' et S' sont ses points de contact. On pourrait ajouter d'autres propriétés de cette quartique qui, comme vous voyez, est liée intimement à la courbe de Jérabek et à la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire.

M. **Hilaire**. — *Sur la question* 549. — Cette question, proposée par M. Faure en 1860 et rappelée en mai 1899, doit être regardée comme résolue. Il suffirait peut-être de rappeler que M. Faure l'a proposée une seconde fois en la dédoublant (1861, p. 56, nos 563 et 564) et que, sous cette forme, M. Cremona en a donné une solution géométrique remarquable (1864, p. 21). Mais comme dans les nouveaux énoncés on a laissé de

côté la dernière partie de la question primitive, je crois devoir reprendre celle-ci, pour en indiquer, très brièvement d'ailleurs, une solution complète et purement analytique.

Je diviserai la question en trois parties :

1° Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une courbe du troisième ordre qui passe, comme on sait, par les six sommets du quadrilatère complet.

En effet, l'équation du lieu a été donnée par M. Salmon dans son *Traité des Sections coniques* (p. 446 de l'édition française), Ouvrage qui avait déjà eu trois éditions anglaises en 1860. On voit immédiatement sur l'équation que la courbe passe par les six points annoncés.

2° La courbe passe aussi par les pieds des hauteurs du triangle déterminé par les trois diagonales du quadrilatère et par les deux points situés à l'infini sur un cercle.

Cette deuxième partie n'est pas évidente, comme la première, sur l'équation de M. Salmon, mais elles le devient sur une autre équation, l'équation en coordonnées trilinéaires où l'on prend pour triangle de référence le triagle des trois diagonales (*voir* par exemple les *Exercices de Kœhler*, t. I, p. 318).

3° La courbe, passant par les deux points situés à l'infini sur un cercle, doit occuper parmi les courbes du troisième ordre le même rang que le cercle dans les coniques; ainsi elle a comme le cercle un double foyer.

La marche à suivre pour démontrer l'existence de ce foyer double se trouve dans le *Traité des Courbes planes* de M. Salmon (p. 173 et suiv. de l'édition française).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1740.

(1896, p. 392 et 1899, p. 335.)

Note par M. A. de Saint-Germain.

Dans sa réponse à la question 1740 (*Nouvelles Annales*, juillet 1899), M. Boulanger est loin de faire connaître toutes les quadriques orthogonales à un ellipsoïde donné. Il dit avec

raison que le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation d'une de ces quadriques doit vérifier une identité de la forme

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a^2} + \mu\right) x f'_x + \ldots + \frac{1}{2} \mu t f'_t ;$$

mais il a tort d'en conclure que f ne doit renfermer ni rectangles, ni termes du premier degré. Soit

$$f(x, y\, z) \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + \ldots + 2 C'' z + D :$$

l'identité (1) entraîne dix équations que je répartis en deux groupes :

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{a^2} + \mu\right) A = \dfrac{1}{a^2}, & \left(\dfrac{\lambda}{b_2} + \mu\right) A' = \dfrac{1}{b^2}, \\ \left(\dfrac{\lambda}{c^2} + \mu\right) A'' = \dfrac{1}{c^2}, & \mu D = -1 ; \end{cases}$$

$$(3)\quad \left(\frac{\lambda}{b^2} + \frac{\lambda}{c^2} + 2\mu\right) B = 0, \quad \ldots \quad \left(\frac{\lambda}{a^2} + 2\mu\right) C = 0. \quad \ldots .$$

Pour des valeurs quelconques de λ et de μ, les équations (3) exigent que B, B', B'', C, C', C'' soient nuls ; on trouve alors, à l'aide des équations (2), le faisceau de quadriques homofocales signalé par l'Auteur. Mais il n'en est plus de même si l'on établit entre λ et μ des relations convenables. Soit d'abord $\mu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b^2} + \frac{\lambda}{c^2}\right)$: la première équation (3) sera satisfaite sans que B soit nul ; les équations (2) donnent A, A', A'', D, et, en remplaçant B par $\frac{2 B_1 b^2 c^2}{\lambda}$, on aura un faisceau de quadriques orthogonales à l'ellipsoïde, dont on peut mettre les équations sous la forme

$$\frac{x^2}{2 b^2 c^2 - a^2 (b^2 - c^2)} + \frac{y^2}{b^2 (c^2 - b^2)} + \frac{z^2}{c^2 (b^2 - c^2)} + 2 B_1 y z - \frac{1}{b^2 + c^2} = 0.$$

On aurait deux faisceaux analogues contenant des termes en zx ou en xy.

Faisons maintenant $\mu = -\frac{\lambda}{2 a^2}$: la quatrième équation (3) est vérifiée sans que C soit nul ; les équations (2) donnent les

valeurs correspondantes de A, A′, A″, D et l'on trouve un nouveau faisceau de quadriques orthogonales dont les équations ont la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2a^2 - b^2} + \frac{z^2}{2a^2 - c^2} + 2C_1 x + 1 = 0.$$

On aurait deux autres faisceaux analogues.

Pour les quadriques orthogonales au paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

on trouve, par une analyse semblable, le faisceau des paraboloïdes homofocaux, et trois autres faisceaux de paraboloïdes définis par des équations de la forme

$$\frac{x^2}{p(q-p)} + \frac{y^2}{q(p-q)} + 2B_1 xy + \frac{2z}{p+q} - \frac{2pq}{(p+q)^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{2p-q} + 2C_1 x + 2z - 2p = 0,$$

$$\frac{x^2}{2q-p} + \frac{y^2}{q} + 2C'_1 y + 2z - 2q = 0.$$

Il sera facile de compléter cette analyse.

Question 1739.

(1895, p. 392; 1899, p. 384.)

On donne une ellipse de centre o. On mène une corde quelconque ab et l'on prend son pôle c par rapport à l'ellipse. Le point p étant la projection sur oc de l'orthocentre h du triangle abc, démontrer que le produit op par oc est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse donnée. (Mannheim.)

AUTRES SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES,

Par M. Mannheim.

Les droites *ca*, *co*, *cb* et la parallèle à *ab* menée du point *c*, forment un faisceau harmonique. Les perpendiculaires à ces droites, abaissées de l'orthocentre *h*, rencontrent alors *ab* en

des points a, e, b, f tels que e, f sont conjugués harmoniques par rapport à a, b. Par suite, le triangle cef est conjugué à l'ellipse et le cercle, qui lui est circonscrit, coupe orthogonalement le cercle orthoptique de l'ellipse ; donc, etc.

Autrement. — Le cercle décrit sur ch comme diamètre coupe à angle droit le cercle dont ab est un diamètre ; on a alors, en appelant m le milieu de ab : $\overline{ma}^2 = mp \times mc$. Par suite le cercle, qui contient a, p, c, est tangent en a à ab ; il est alors circonscrit au triangle aplati suivant ca. Ce triangle est conjugué à l'ellipse ; donc, etc.

Question 1769 (1).

(1897, p. 291. 1899, p. 384.)

Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes ; les circonférences de cercles, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. (MANNHEIM.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE,

PAR M. MANNHEIM.

Appelons f le foyer de la conique par lequel passe l'une des cordes mn. Par rapport à un cercle de centre f, la polaire réciproque de la conique est un cercle de centre o et de rayon R. Les polaires de m, n sont des tangentes à ce cercle, elles sont parallèles, distantes de 2R et coupent mn aux points m', n'. Prenons f pour pôle d'inversion. Le cercle décrit sur mn comme diamètre a pour transformée par inversion le cercle C décrit sur $m'n'$ comme diamètre. Ce cercle, dont le

(1) Au sujet de cette question MM. Mannheim et Barisien nous font remarquer avec raison que la solution de M. Audibert est incomplète. M. Audibert démontre en effet que le lieu des centres des cercles en question est une conique et se borne ensuite à faire observer que le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles fixes est une conique. Or de ce que le centre d'un cercle décrit une conique, on ne peut évidemment pas conclure que ce cercle enveloppe deux autres cercles, puisqu'il faut une autre condition pour définir le déplacement du cercle mobile. X. A.

diamètre est égal à $2R$, a son centre au pied de la perpendiculaire abaissée de o sur mn, c'est-à-dire en un point du cercle décrit sur of comme diamètre.

Lorsque mn tourne autour de f, le cercle C de grandeur constante, se déplace de façon que son centre reste sur un cercle; son enveloppe se compose alors de deux cercles concentriques; donc, etc.

Question 1773.

(1897, p. 340.)

Étant donnés une cycloïde de base AB *et un cercle ayant son centre au milieu* C *de* AB, *on prend la podaire de la cycloïde par rapport à un point quelconque* M *du cercle. Prouver que l'aire comprise entre la podaire, la droite* AB *et les deux tangentes* A *et* B *à la cycloïde est constante.* (E.-N. Barisien.)

NOTE.

Par un abonné.

Je crois que la proposition énoncée n'est pas exacte. En effet, si l'on prend pour axe polaire la droite parallèle à AB menée par le pôle M, et que l'on désigne par ω l'angle polaire, par a le rayon du cercle générateur de la cycloïde, par α et β les coordonnées de M relatives à deux axes dont l'un est AB et l'autre une perpendiculaire à cette droite menée par C milieu de AB, l'équation de la podaire sera

$$\rho = (2a - \beta)\sin\omega + (a\pi + \alpha - 2a\omega)\cos\omega.$$

L'aire S de la podaire comprise entre l'axe polaire et la courbe est déterminée par l'intégrale

$$\begin{aligned} 2S &= \int_0^\pi \rho^2\, d\omega \\ &= \int_0^\pi [\cos^2\omega(a\pi+\alpha)^2 + (2a-\beta)^2\sin^2\omega \\ &\qquad + (2a-\beta)(a\pi+\alpha)\sin 2\omega - 4a^2\omega^2\cos^2\omega \\ &\qquad - 4a(a\pi+\alpha)\omega\cos^2\omega + 2a(2a-\beta)\omega\sin 2\omega]\, d\omega \\ &= \frac{a^2\pi^3}{6} + 5a^2\pi + \frac{\pi}{2}(\alpha^2+\beta^2) - 3a\pi\beta. \end{aligned}$$

Si le point M est sur un cercle ayant son centre en C, le terme $\frac{\pi}{2}(\alpha^2+\beta^2)$ est constant, mais en ajoutant à 2S le double de l'aire du rectangle dont les côtés sont AB et β, on a

$$2S + 2AB\beta = \frac{a^2\pi^3}{6} + 5a^2\pi + \frac{\pi}{2}(a^2+\beta^2) + a\pi\beta,$$

expression qui varie avec β.

Question 1774.

(1897, p. 340.)

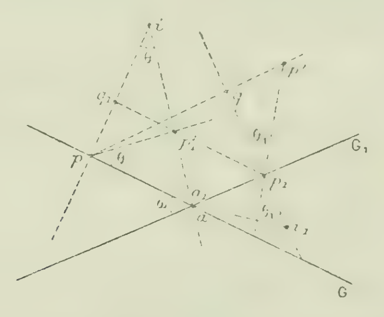
Le produit des paramètres de distribution des plans tangents à un paraboloïde hyperbolique, pour deux génératrices du même système et rectangulaires, est égal au carré de la plus courte distance de ces droites.

(MANNHEIM.)

GÉNÉRALISATION

Par M. D'OCAGNE.

Soient G et G_1 deux génératrices *quelconques* de même système projetées sur le plan directeur de ce système pris pour plan horizontal. Leur plus courte distance (aa_1) se projette suivant un point. Soient, en outre, p et p_1 les points centraux correspondants. Les plans centraux sont respectivement les



plans verticaux passant par G et G_1. Le plan tangent en a est défini par les génératrices G et ap_1, en a_1 par les génératrices G_1 et a_1p.

Faisons une projection sur le plan vertical perpendiculaire

en p à ap. Le point p_1 se projette sur la perpendiculaire $p_1 q_1$ à la trace pq_1 de ce plan vertical, au point p'_1 tel que $q_1 p'_1 = \delta$, δ étant la plus courte distance de G et G_1.

Dès lors, l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan central en p est projeté en vraie grandeur en app'_1. Abaissons du point a la perpendiculaire ai sur pp'_1. Elle coupe pq_1 au point i, et ce point est le point représentatif de la distribution des plans tangents pour la génératrice G. En effet, d'une part, pi est la perpendiculaire élevée à G par le point central p, de l'autre, l'angle pia sous lequel on voit du point i le segment pa est égal à l'angle θ que le plan tangent en a fait avec le plan central.

Par suite, le paramètre de distribution k de la génératrice G est égal à pi.

On obtient de même le paramètre de distribution $p_1 i_1 = k_1$ de G_1.

Si maintenant nous appelons l et l_1 les segments ap et $a_1 p_1$, ω l'angle des génératrices G et G_1, la similitude des triangles api et $pq_1 p'_1$, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, nous donne

$$\frac{pi}{pa} = \frac{q_1 p'_1}{q_1 p}$$

ou

$$\frac{k}{l} = \frac{\delta}{l_1 \sin\omega},$$

d'où

$$k = \frac{\delta\, l}{l_1 \sin\omega}.$$

De même,

$$k_1 = \frac{\delta\, l_1}{l \sin\omega}.$$

Faisant le produit, on a

$$kk_1 = \frac{\delta^2}{\sin^2\omega}.$$

C'est-à-dire que *le produit des paramètres de distribution de deux génératrices* QUELCONQUES *de même système du paraboloïde, est égal au carré du quotient de leur plus courte distance par le sinus de leur angle.*

Dans le cas où l'on suppose $\omega = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le théorème de l'énoncé.

Question 1778.

(1897, p. 388.)

Une conique rencontre les côtés BC, CA, AB *d'un triangle en* D, D′, E, E′, F, F′. *Les tangentes en* D, D′ *rencontrent* AB, AC *en* K, K′. L *est le conjugué harmonique de* B *par rapport aux points* F, F′, M *celui de* C *par rapport à* E, E′.

Démontrer que D′L, DM, KK′ *concourent en un même point.* (W. J. Greenstreet.)

SOLUTIONS

Par M. G. Leinekugel.

Solution géométrique. — On sait que l'enveloppe des droites rencontrant deux coniques (S), (Σ) en quatre points formant une division harmonique, est une conique tangente aux huit droites menées aux quatre points communs à (S), (Σ) et tangentes à ces coniques.

Considérons la conique (S) donnée et la conique (Σ) formée des droites (BC.LM), nous en déduisons, dans ce cas particulier, qu'il existe une conique tangente à DK, D′K′, BC et LM qui font partie des tangentes aux points communs aux coniques (S), (BC, LM); et de plus aux droites CA, BA, puisque

$$(\mathrm{CMEE'}) = -1, \qquad (\mathrm{BLFF'}) = -1.$$

L'hexagone LMKDD′K′ étant circonscrit à une conique, les trois diagonales concourent en un même point.

Solution analytique. — Prenons comme (*fig.* 1) triangle de référence DD′D″ et pour équations de (S), AB, AC,

$$\text{(S)} \qquad \beta\gamma - \mu^2\alpha^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\text{AB} \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \qquad (2)$$

$$\text{AC} \qquad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0 \qquad (3)$$

l'ensemble des droites D′F′, D′F obtenues par l'élimination de β entre (1) et (2), est

$$\mu^2 m\alpha^2 + l\alpha\gamma + n\gamma^2 = 0;$$

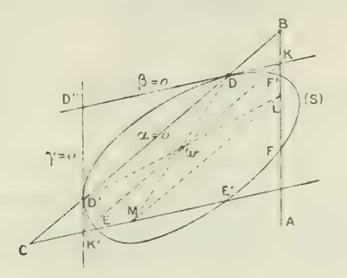
la conjuguée harmonique D′L de $\alpha = 0$, par rapport à ces

droites, a pour équation

$$(D'L) \qquad \alpha + \frac{2n}{l}\gamma = 0; \qquad (4)$$

de même, on a

$$(DM) \qquad \alpha + \frac{2m'}{l'}\beta = 0. \qquad (5)$$



Quant à l'équation de KK', elle est

$$(KK') \qquad \alpha + \frac{n}{l}\gamma + \frac{m'}{l'}\beta = 0, \qquad (6)$$

puisqu'elle doit passer par les deux points

$$K\begin{cases} \beta = 0, \\ \alpha + \frac{n}{l}\gamma = 0, \end{cases} \qquad K'\begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha + \frac{m'}{l'}\beta = 0. \end{cases}$$

Ces trois droites D'L, DM, KK' passent par un même point ω, puisqu'en ajoutant (4) et (5), on tombe sur l'équation (6).

Autres solutions de MM. W. Greenstreet et J. Richard.

Question 1786.

(1898, p. 99.)

A, B, C, D *étant quatre quantités imaginaires données et* X *une quantité imaginaire variable, on forme le déterminant*

$$\begin{vmatrix} A + X & B + X \\ C + X & D + X \end{vmatrix} = \Delta.$$

Démontrer :

1° *Que si le module de* Δ *reste constant, le point* X, *affixe de* X, *parcourt une circonférence;*

2° *Que si l'argument de* Δ *reste constant, le point* X *parcourt une droite.*

Trouver le centre de cette circonférence et la direction de cette droite lorsque l'argument de Δ *est nul.*

(C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. Dulimbert.

Je pose

$$A = a + a'i, \quad B = b + b'i, \quad C = c + c'i, \quad D = d + d'i,$$
$$X = x + yi, \quad \Delta = \xi + \eta i = \rho(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Le développement du déterminant donne immédiatement

$$\begin{aligned}\xi &= (a + d - b - c)x + (b' + c' - a' - d')y \\ &\quad + ad - a'd' - (bc - b'c'),\\ \eta &= (a' + d' - b' - c')x + (a + d - b - c)y \\ &\quad + ad' + a'd - (bc' + b'c).\end{aligned}$$

Les équations $\xi = 0$, $\eta = 0$ représentent deux droites rectangulaires dont les directions sont faciles à déterminer. En effet, la quantité

$$\frac{a' + d' - (b' + c')}{a + d - (b + c)}$$

est le coefficient angulaire de la droite qui joint le milieu de AD au milieu de BC. La droite $\eta = 0$ est symétrique de cette droite par rapport aux axes coordonnés et la droite $\xi = 0$ perpendiculaire à $\eta = 0$.

Si ρ est constant, on a

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

équation d'un cercle qui a pour centre le point d'intersection des droites $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Si ω est constant, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\eta}{\xi}$$

ou

$$\eta - \xi \operatorname{tang}\omega = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le point d'intersection des deux mêmes droites.

Enfin, si ω est nul, le point X décrit la droite $\eta_1 = 0$, dont la direction a été déterminée précédemment ([1]).

Autre solution de M. E.-N. Barisien.

Question 1787.

(1898, p. 148.)

On considère les points de contact des coniques inscrites à un quadrilatère avec un des côtés du quadrilatère et l'on demande :

1° *Le lieu des centres de courbure de ces coniques correspondant aux points de contact;*

2° *L'enveloppe des cercles osculateurs qui correspondent aux centres de courbure précédents.* (G. Tzitzéica.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

1° Prenons pour axes des coordonnées deux côtés quelconques du quadrilatère se coupant à l'origine et faisant entre eux un augle α; soient

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{d} - 1 = 0$$

les équations des deux autres côtés, celle d'une conique inscrite sera

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)y\right]^2}{\lambda} + \frac{\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1\right)^2}{1 - \lambda} - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{d} - 1\right)^2 = 0.$$

([1]) *Note de la Rédaction.* — Δ se mettant sous la forme immédiate $P + QX$, il est évident que si le module de X est constant l'extrémité de Δ décrit une circonférence dont le centre est l'extrémité de P; et que si l'argument de Δ est constant, on a une droite passant par l'extrémité de P. (C.-A. L.)

Cette courbe touche l'axe des X au point

$$y = 0, \qquad x = \frac{ac\lambda}{a - c(1-\lambda)} = m.$$

Transportons l'origine à ce point, en conservant l'axe des X et prenant pour ligne des ordonnées la normale à la courbe. Les formules de transformation sont

$$x = m + x_1 - y_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad y = \frac{y_1}{\sin\alpha},$$

et le rayon de courbure à l'origine, ρ, sera égal au coefficient de y, divisé par le coefficient de x_1^2, dans l'équation transformée.

On trouve, d'après ces données,

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{bc(1-\lambda)} - \frac{1}{ad}\right] m - \frac{d - b(1-\lambda)}{db(1-\lambda)}}{\frac{[a - c(1-\lambda)]^2}{a^2c^2\lambda(1-\lambda)}\sin\alpha}.$$

Reportons le système rectangulaire d'axes parallèlement à lui-même à l'origine primitive ; nous aurons, x et y étant les coordonnées du lieu cherché,

$$y = \rho, \qquad x = m, \qquad \lambda = \frac{x(a-c)}{c(a-x)},$$

$$1 - \lambda = \frac{a(c-x)}{c(a-x)}, \qquad \frac{[a - c(1-\lambda)]^2}{a^2c^2\lambda(1-\lambda)} = \frac{a-c}{a(c-x)}.$$

Il en résulte l'équation

$$(1) \qquad y\frac{bd(a-c)}{2(b-d)}\sin\alpha = x(x-a)(x-c).$$

2° L'équation de l'enveloppe des cercles osculateurs tangents à l'axe des X, s'obtiendra en substituant dans (1) $\frac{y}{2}$ à y.

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

Sujet.

I. *On propose d'établir le fait suivant :*

Il peut arriver de deux manières différentes que les neuf droites joignant trois points A, B, C *à trois points* A', B', C' *soient tangentes à une quadrique :*

1° *Les trois points* A, B, C *peuvent correspondre un à un aux trois points* A', B', C' *par le fait que chacun des trois quadrilatères qui ont pour sommets* B, C, B', C' *ou* C, A, C', A' *ou* A, B, A', B' *a ses quatre points de contact dans un même plan, la même chose n'ayant pas lieu pour les six autres quadrilatères de la figure;*

2° *Les deux points* C *et* C' *par exemple peuvent jouer un rôle à part. Les points de contact* 1, 2, 3, 4 *des côtés du contour* AB'BA' *sont dans un même plan, les droites* 12 *et* 34 *coupant* AB *en* S, *les droites* 14 *et* 23 *coupant* A'B' *en* S'; *pour* C'A *et* C'B, *la corde des contacts coupe* AB *en* S, *pour* CA' *et* CB', *la corde des contacts coupe* A'B' *en* S'; *les cinq contours ayant pour sommets les points de l'un des systèmes*

ABA'B', { ABA'C', ABB'C', { A'B'AC, A'B'BC,

ont donc chacun leurs quatre points de contact dans un même plan.

II. *La figure dépend de dix-huit paramètres. Pour le premier des deux systèmes indiqués, si l'on se donne la quadrique, les trois tangentes* AA′, BB′, CC′ *doivent satisfaire à une condition, et le contour hexagonal* AB′CA′BC′A *dépend alors d'un paramètre; la condition en question est satisfaite en particulier si les trois tangentes* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes. On demande, pour les deux cas, si l'on peut se donner arbitrairement les six points* A, B, C, A′, B′, C′ *pour déterminer la quadrique, ou s'ils doivent satisfaire à une condition et donner lieu à une infinité de quadriques; à défaut d'une réponse complète à cette partie de la question, on demande d'examiner au moins le cas où les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

Conditions.

Le concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de M. Gauthier-Villars;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 MAI 1900, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 novembre et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 juin 1900, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[O2b]

PROBLÈMES DIVERS SUR LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES;

PAR M. ED. COLLIGNON.

LE PROBLÈME DE M. DE BEAUNE.

On lit dans l'*Aperçu historique* de Chasles [1] : « C'est de Beaune qui, le premier, conçut l'idée d'introduire dans la théorie des courbes les propriétés de leurs tangentes comme élément propre à leur construction, et qui, par une question de cette nature proposée à Descartes, donna naissance à la *méthode inverse des tangentes*. Il s'agissait de construire une courbe telle que le rapport de sa sous-tangente à l'ordonnée fût dans une raison constante avec la partie de l'ordonnée comprise entre la courbe et la bissectrice de l'angle des axes ».

La méthode inverse des tangentes revient à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. L'équation à intégrer pour résoudre le problème posé par de Beaune est

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - x}{a}, \tag{1}$$

désignant une longueur donnée. Le problème reste le même, au point de vue analytique, si l'on substitue à la bissectrice de l'angle des axes une droite quelconque, $y = bx + h$. On reconnaît aisément, en effet, que la positoin de l'origine O n'influe en rien sur la courbe cherchée, et qu'ainsi l'on peut la placer à l'intersection

[1] Page 96. Bruxelles; 1837.

de la droite donnée avec l'axe des abscisses, ce qui réduit à zéro l'ordonnée h. Étant donnée l'équation

$$(2) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

on peut, par un changement de variable, la ramener à la forme (1). Posons, en effet,

$$bx = x',$$

relation d'où l'on déduit $dx = \frac{dx'}{b}$; l'équation différentielle prend la forme

$$\frac{dx'}{b\,dy} = \frac{y - x'}{a},$$

ou bien

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{y - x'}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{y - x'}{a'}.$$

Par conséquent, la transformation équivaut à la substitution d'une nouvelle quantité constante $a' = \frac{a}{b}$ à la quantité donnée a, sauf à effacer le coefficient de l'abscisse x.

On peut simplifier de même l'équation (1), en remplaçant les quantités variables x et y par leurs rapports x' et y' à la quantité constante a, prise comme unité de mesure. Il vient, en effet,

$$(3) \qquad \frac{dx'}{dy'} = y' - x',$$

équation dont l'intégrale fera connaître, par des transformations convenables, l'intégrale de l'équation (1) et celle de l'équation (2).

Cette équation (3) à laquelle on ramène les deux autres, est une équation linéaire et du premier ordre, en y considérant y' comme la variable indépendante, et

x' comme la fonction inconnue. Posons

$$\frac{dx'}{dy'} + x' = y'.$$

On voit tout de suite qu'on satisfera à l'équation en posant $x' = y' - 1$, ce qui donne une solution particulière de l'équation avec son second membre. D'ailleurs, l'équation réduite à son premier membre a pour intégrale générale

$$x' = Ce^{-y'}.$$

Donc, enfin, l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$x' = Ce^{-y'} + y' - 1,$$

avec une constante arbitraire C.

On passera de là à l'intégrale générale de l'équation (1) en remplaçant x' par $\frac{x}{a}$, y' par $\frac{y}{a}$; puis à celle de l'équation (2) en remplaçant x par bx, et a par $\frac{a}{b}$. Il viendra

$$x = aCe^{-\frac{y}{a}} + y - a$$

pour l'équation (1),

$$x = \frac{a}{b^2}Ce^{-\frac{by}{a}} + \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2}$$

pour l'équation (2).

Sous cette forme, on reconnaît sur-le-champ que les courbes cherchées ont pour asymptote la droite

$$y = bx + \frac{a}{b},$$

parallèle à la droite donnée, et écartée d'elle à la distance $\frac{a}{b}$ mesurée sur l'axe des y.

On peut arriver à une équation différentielle plus simple encore en changeant de coordonnées. Soit O' le

point où l'asymptote $y = bx + \frac{a}{b}$ rencontre l'axe OY ([1]); par ce point menons une droite $O'\eta$ parallèle à OX. Nous prendrons pour nouveaux axes les droites $O'\xi$, asymptote à la courbe, et $O'\eta$, parallèle à OX; soit φ l'angle de ces deux axes, angle dont la tangente trigonométrique sera égale à b, si nous supposons les axes primitifs rectangulaires. Les formules de transformation seront

$$x = \xi \cos\varphi + \eta,$$
$$y = \xi \sin\varphi + \frac{a}{b};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{dy} = \cot\varphi + \frac{d\eta}{d\xi \sin\varphi} = \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\frac{d\eta}{d\xi},$$

$$y - bx = \xi \sin\varphi + \frac{a}{b} - (\xi \sin\varphi + \eta \operatorname{tang}\varphi) = \frac{a}{b} - b\eta,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (3), la réduisent à la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}}\eta.$$

La séparation des variables s'opère immédiatement, et l'on obtient pour équation finale

$$\eta = Ce^{-\frac{b^2}{a\sqrt{1+b^2}}\xi}.$$

La courbe est donc une exponentielle rapportée à des axes obliques $O'\xi$, $O'\eta$. Si par un point M de la courbe on mène l'ordonnée $MR = \eta$ jusqu'à la rencontre de l'asymptote $O'\xi$, puis la tangente MT jusqu'à la même droite, la sous-tangente RT mesurée sur l'asymptote a une longueur constante et égale à $\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b^2}$. On revient

---

([1]) Le lecteur est prié de faire les figures.

au problème de M. de Beaune, en faisant $b = 1$, et la valeur constante de la sous-tangente RT est alors égale à $a\sqrt{2}$.

On reconnaît aisément, en faisant la figure, que la droite MR, parallèle à OX, prolongée et l'ordonnée TP', parallèle menée à OY par le point T où la tangente MT coupe l'asymptote, se rencontrent en un point K appartenant à la droite donnée $y = bx$. Le triangle RKT, rectangle en K, est constant pour tous les points de la courbe; ses côtés sont

$$KT = \frac{a}{b}, \qquad RK = \frac{a}{b^2}, \qquad RT = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b^2}.$$

Lorsque le point M se déplace sur la courbe en entraînant le côté RK, l'hypoténuse RT glisse le long de l'asymptote, pendant que le sommet K de l'angle droit glisse le long de la droite donnée.

L'équation différentielle de la courbe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

mise sous la forme

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay}{y - bx},$$

fait voir que la *sous-normale de la courbe, prise sur une parallèle à* OX *menée par le point* M' *où l'ordonnée* MP *rencontre la droite donnée, est constante et égale à a.*

Cette proposition subsiste encore lorsqu'on remplace la droite donnée, $y = bx$, par une courbe quelconque, $y = f(x)$; car de l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a},$$

on déduit toujours

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{ay}{y - f(x)}.$$

Le premier membre représente la sous-normale PN prise sur l'axe OX. Le dénominateur du second membre est la différence MM′ des ordonnées des deux courbes, et si par le point M′ on mène une parallèle M′C à l'axe OX jusqu'au point C où elle coupe la normale MN, on aura la proportion

$$\frac{\text{PN}}{\text{M}'\text{C}} = \frac{\text{MP}}{\text{MM}'}.$$

Donc

$$\text{M}'\text{C} = \frac{\text{PN} \times \text{MM}'}{\text{MP}} = \frac{y\,dy}{dx} \times \frac{[y - f(x)]}{y} = a.$$

Il résulte de là que *le lieu des points* C, *obtenus pour tous les points* M *de la courbe, est la courbe* $y = f(x)$ *elle-même, déplacée de la quantité a parallèlement à l'axe* OX.

Revenons à la courbe qui satisfait à la relation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a},$$

pour laquelle le lieu du point C sera la droite $y = b(x - a)$. Le triangle MKT est semblable au triangle MM′C, les côtés de ces deux triangles étant respectivement perpendiculaires. On a, par conséquent,

$$\frac{\text{MC}}{\text{MT}} = \frac{\text{M}'\text{C}}{\text{KT}} = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)} = b.$$

Si donc on joint TC, l'angle CTM a pour tangente trigonométrique la quantité b, c'est-à-dire qu'il est constant et égal à l'angle de la droite donnée avec l'axe OX. On a en définitive ce théorème :

Du point de rencontre T *de la tangente avec l'asymptote, la portion de normale* MC *vue sous l'angle* φ *dont la tangente est* b, *a pour extrémité* C

un point situé sur la droite D′D′ *parallèle à la droite donnée* OD.

En d'autres termes, le triangle MTC, rectangle en M, mobile et déformable quand le point M suit la courbe, reste constamment semblable au triangle M′PO, formé par l'ordonnée, l'axe OX et la droite donnée OD.

Il n'est pas inutile de faire voir que l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - bx}{a}$$

peut s'intégrer directement, sans passer par les réductions que nous lui avons fait subir. Faisons $\frac{dy}{dx} = p$, et résolvons par rapport à l'ordonnée y. Il vient

$$y = bx + \frac{a}{p}.$$

Différentions et remplaçons dy par pdx. Nous aurons

$$p\,dx = b\,dx - \frac{a}{p^2}\,dp,$$

équation où les variables se séparent immédiatement. On a, en effet, en résolvant par rapport à dx,

$$dx = \frac{a\,dp}{p^2(b-p)} = \frac{a}{b^2}\,\frac{dp}{p} + \frac{a}{b}\,\frac{dp}{p^2} + \frac{a}{b^2}\,\frac{dp}{b-p};$$

puis l'intégration donne

$$x = C - \frac{a}{bp} + \frac{a}{b^2}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right),$$

et, par conséquent,

$$y = bC + \frac{a}{b}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right).$$

Si l'on élimine p entre ces deux équations, il vient

$$x = \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2} - C'e^{-\frac{b}{a}y};$$

en remplaçant par une nouvelle constante, C', le produit $\frac{a}{b^2}e^{\frac{b^2 C}{a}}$; cette équation est identique à celle que nous avons obtenue plus haut.

Nous allons chercher le rayon de courbure de la courbe, déduit de son équation différentielle. La marche à suivre s'applique identiquement à la courbe plus générale qui serait représentée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a},$$

lorsque la droite du problème primitif est remplacée par une courbe quelconque.

De cette équation, mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{a}{y - f(x)},$$

on déduit, en prenant la dérivée des deux membres par rapport à x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{-a\left[\frac{dy}{dx} - f'(x)\right]}{[y - f(x)]^2}$$
$$= \frac{-a\{a - [y - f(x)]f'(x)\}}{[y - f(x)]^3};$$

et, par conséquent, on a pour le rayon de courbure ρ

$$\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = -\frac{\{[y - f(x)]^2 + a^2\}^{\frac{3}{2}}}{a\{a - f'(x)[y - f(x)]\}}.$$

Soient AB la courbe cherchée, M le point pour lequel on cherche le rayon de courbure; soient FG la courbe donnée $y = f(x)$, et M' le point de cette courbe qui correspond à l'abscisse x. Si l'on mène la normale MC et, par le point M', la droite M'C parallèle à OX, on sait qu'on a $M'C = a$.

La différence $y - f(x)$ est représentée sur la figure

par le segment MM'; $M'C = a$ et MM' sont les côtés de l'angle droit dans le triangle MM'C, dont l'hypoténuse est la normale MC. On a donc

$$\overline{MC}^2 = [y - f(x)]^2 + a^2,$$

de sorte que le numérateur de la valeur de ρ est représenté par $\overline{MC}^3$.

Du point M abaissons MC' perpendiculaire sur la tangente M'T' menée à la courbe $y = f(x)$, et soit C' le point où elle rencontre la droite M'C. Nous aurons

$$M'C' = MM' \operatorname{tang}(C'MM') = MM'f'(x) = f'(x)[y - f(x)],$$

et la différence

$$a - f'(x)[y - f(x)] = MC - M'C' = CC';$$

d'où résulte la formule

$$\rho = -\frac{\overline{MC}^3}{a \times CC'}.$$

On peut aisément trouver sur la figure une droite qui soit égale en valeur absolue au rayon ρ. Soit T le point où la tangente MT à la courbe AB coupe la droite CM' parallèle à OX. On aura dans le triangle CMT, rectangle en M, et dans lequel MM' est perpendiculaire à l'hypoténuse CT,

$$\overline{MC}^2 = M'C \times CT = a \times CT.$$

Donc

$$\frac{\overline{MC}^2}{a} = CT,$$

ce qui transforme l'expression du rayon de courbure en celle-ci :

$$\rho = \frac{MC \times CT}{CC'}.$$

Par le point T menons une droite TF', perpendicu

laire à la tangente M′T′, c'est-à-dire parallèle à MC′, et prolongeons-la jusqu'à la rencontre en S avec la normale CM prolongée. Les parallèles MC′, ST nous donneront la proportion

$$\frac{CS}{CM} = \frac{CT}{CC'};$$

donc

$$CS = \frac{MC \times CT}{CC'} = -\rho.$$

Le segment CS, déterminé sur la normale par la rencontre de TT′, est en valeur absolue la longueur du rayon de courbure. De cette construction résultent plusieurs conséquences :

1° Si au point M la tangente MT est parallèle à la tangente M′T′ menée au point M′ à la courbe $y = f(x)$, les droites TT′ et MC sont parallèles, et le rayon ρ devient infini. La courbure est nulle en ce point M;

2° Au point où la courbe cherchée AB coupe la courbe donnée $y = f(x)$, le segment MM′ est nul, et l'on a $\rho = a$. En ce point la tangente MT à la courbe cherchée est parallèle à OY.

Lorsque la fonction $f(x)$ est linéaire, elle peut être représentée par bx, et la formule générale prend une forme plus simple. On a, en effet,

$$\rho = -\frac{[(y-bx)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{a[a - b(y-bx)]} = \frac{[(y-bx)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{ab\left[\frac{a}{b} - (y-bx)\right]}.$$

Le numérateur est toujours égal à $\overline{MC}^3$. Quant au dénominateur, $\frac{a}{b}$ est la distance M′m comprise, sur l'ordonnée du point M, entre la droite donnée $y = bx$ et l'asymptote $y = bx + \frac{a}{b}$; de sorte que la différence

$\frac{a}{b} - (y - bx)$ représente la différence

$$\mathrm{M}'m - \mathrm{MM}' = \mathrm{M}m,$$

c'est-à-dire le segment compris entre la courbe et l'asymptote. Il vient donc

$$\rho = -\frac{\overline{\mathrm{MC}}^3}{ab \times \mathrm{M}m},$$

relation que nous aurons l'occasion d'employer tout à l'heure.

L'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a}$$

ne peut être intégrée par les méthodes qui réussissent lorsque la fonction $f(x)$ est une fonction linéaire de l'abscisse. Remarquons que, dans ce cas plus général, on peut tourner la difficulté en considérant les trajectoires orthogonales des courbes comprises dans l'équation (1). Pour avoir l'équation différentielle de ces courbes, il suffit de changer $\frac{dx}{dy}$ en $-\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y - f(x)}{a}.$$

La transformation revient donc à changer $\frac{dx}{dy}$ en $\frac{dy}{dx}$, en changeant en même temps le signe de a. Or, l'équation (1) est une équation linéaire du premier ordre, dont l'équation intégrale peut s'écrire immédiatement. On a, en effet, pour l'intégrale générale,

$$(3) \qquad y = \mathrm{C}e^{-\frac{x}{a}} + \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\int e^{\frac{x}{a}} f(x)\,dx.$$

Il est facile de reconnaitre que ces courbes satisfont à

la condition de donner une sous-tangente constante, et égale à $-a$, la sous-tangente étant prise, non sur l'axe OX, mais sur une parallèle à cet axe menée par le point M′ où l'ordonnée de la courbe cherchée coupe la courbe donnée $y=f(x)$.

Les courbes (3) une fois tracées sur le plan, il suffira de mener leurs trajectoires orthogonales pour obtenir les courbes qui satisfont à l'équation (1); cette opération se fait facilement : c'est celle que l'on exécute pour tracer les lignes de plus grande pente d'une surface topographique définie par ses lignes de niveau.

Remarques sur les courbes représentées par l'équation

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-f(x)}{a}.$$

1. Posons $f(x)=y'$, et écrivons l'équation sous la forme

$$(y-y')\,dy=a\,dx.$$

Imaginons qu'on déplace la courbe donnée FG, représentée par l'équation $y'=f(x)$, de la quantité a parallèlement à l'axe OY; l'aire élémentaire comprise entre les deux positions de la courbe et entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x et $x+dx$, aura pour mesure $a\,dx$; l'aire totale comprise entre les deux positions de FG et les ordonnées de deux points A et B pris sur la courbe cherchée, sera exprimée par l'intégrale

$$\int_{A}^{B} a\,dx=a(x_1-x_0),$$

en appelant x_0 et x_1 les abscisses des points A et B.

En chaque point M de la courbe cherchée prenons sur une parallèle à OX une quantité égale à

$$MM'=y-y',$$

différence des ordonnées des deux courbes; l'extrémité du segment ainsi formé sera un point μ, qui décrira un certain lieu $\alpha\mu\beta$, quand le point M suivra la courbe cherchée de A à B; et l'aire élémentaire comprise entre les deux courbes et les deux horizontales correspondantes aux ordonnées y et $y + dy$, aura pour mesure $(y - y')\,dy$. L'aire totale comprise entre les deux courbes et les horizontales des points A et B sera exprimée par l'intégrale

$$\int_A^B (y - y')\,dy.$$

L'équation différentielle nous fait voir, par conséquent, que ces deux aires sont égales, et que la seconde aire $A\alpha\beta B$ croît proportionnellement à l'abscisse.

Si l'on suppose $y' = 0$, c'est-à-dire si l'on prend pour courbe donnée FG l'axe OX lui-même, la courbe cherchée AB devient la parabole

$$y^2 = 2ax.$$

et la courbe $\alpha\beta$ qu'on en déduit en portant, en chaque point M une longueur horizontale $M\mu = y$, est une autre parabole

$$y^2 = 2a(x - y).$$

La propriété qu'on vient d'établir montre que l'aire $A\alpha\beta B$ comprise entre deux parallèles à l'axe de la courbe est proportionnelle à la différence des abscisses, x_1 et x_0, des points extrêmes A et B pris sur la première parabole.

Lorsqu'on part de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - f(x)}{a}.$$

on parvient de même à une équivalence d'aires.

$$\int_A^B a\,dy = \int_A^B [y - f(x)]\,dx,$$

dont l'interprétation est plus simple.

2. Toutes les courbes AB représentées par l'équation générale

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - f(x)}{a}$$

sont telles que la sous-normale M'C, prise sur une parallèle à l'axe OX menée par le point M' où la courbe donnée FG rencontre l'ordonnée MP du point M, est constante et égale à a.

Il résulte de cette propriété que chacune des courbes AB peut être regardée comme l'enveloppe des positions successives d'une parabole MI, de paramètre $2a$, qui recevrait un mouvement de translation dans le plan des axes. La parabole mobile aurait son axe parallèle à OX, son sommet I serait situé sur la droite CM' prolongée, au milieu du segment M'S déterminé sur cette droite par la tangente MS menée à la courbe. Si l'on appelle p le rapport $\frac{dy}{dx}$, et x_1, y_1 les coordonnées du sommet I, on aura

$$x_1 = x - \frac{a}{2p^2},$$
$$y_1 = f(x).$$

Dans le cas particulier où la ligne donnée FG est une droite $y = bx$, on aura pour les coordonnées du sommet I de la parabole, tangente de M à la courbe cherchée,

$$x_1 = C - \frac{a}{bp} - \frac{a}{2p^2} + \frac{a}{b^2}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right),$$
$$y_1 = b\,C - \frac{a}{p} + \frac{a}{b}\,l\left(\frac{p}{b-p}\right).$$

Nous avons trouvé plus haut, dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est linéaire,

$$\rho = -\frac{\overline{\mathrm{MC}}^3}{ab \times \mathrm{M}m}.$$

La parabole tangente à la courbe au point M a pour axe de figure la droite M′C; la droite MC lui est normale et a est son demi-paramètre. On a donc pour le rayon de courbure ρ_1 de cette parabole

$$\rho_1 = -\frac{\overline{\mathrm{MC}}^3}{a^2}.$$

On en déduit pour le rapport des deux rayons de courbure des courbes tangentes en M,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{a^2}{ab \times \mathrm{M}m} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\mathrm{M}m} = \frac{\mathrm{M}'m}{\mathrm{M}m};$$

car $\frac{a}{b}$ est l'intervalle parallèle à OY compris entre l'asymptote et la droite donnée. Au point où la courbe AB coupe la droite donnée, on a $\mathrm{M}m = \frac{a}{b} = \mathrm{M}'m$, et, par conséquent, $\rho = \rho_1$. La parabole et la courbe sont osculatrices.

3. La courbe cherchée AB peut être regardée, dans le cas général, comme engendrée par un point M lié invariablement à une courbe qui roulerait sur la courbe fg, déduite de la courbe FG par un déplacement égal à a, parallèle à l'axe OX; cette courbe fg est, en effet, le lieu des points C tels que CM soit la normale à la courbe AB. Pour trouver l'équation polaire de la courbe roulante, nous considérerons le point décrivant M comme le pôle, $\mathrm{MC} = r$ comme le rayon vecteur, et θ désignera l'angle polaire; si l'on appelle μ l'angle

compris entre le rayon vecteur MC et la tangente Ct menée au point C à la courbe fg, on aura

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Mais les courbes fg et FG étant parallèles et déduites l'une de l'autre par une simple translation parallèle à OX, les tangentes en C et M' aux deux courbes sont parallèles, et l'angle μ est l'angle que fait la direction $-\frac{dx}{dy}$ de la normale MC avec la direction $f'(x)$ de la tangente à FG. On a donc

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{f'(x) + \dfrac{dx}{dy}}{1 - f'(x)\dfrac{dx}{dy}} = r\frac{d\theta}{dr},$$

équation où l'on remplacera y et $\frac{dx}{dy}$ en fonction de x. On a d'ailleurs

$$r = \sqrt{(\mathrm{MM'})^2 + (\mathrm{M'C})^2} = \sqrt{[y - f(x)]^2 + a^2},$$

où l'on remplacera aussi y par sa valeur en x. L'élimination de x entre ces deux équations conduira à une équation différentielle, qui définira θ en fonction de r, et définira la courbe roulante.

Lorsque $f(x) = bx$, il vient successivement, en exprimant toutes les variables en fonction de la dérivée $p = \frac{dy}{dx}$,

$$r = \frac{a\sqrt{1+p^2}}{p},$$

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{1+bp}{p-b}$$

et

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{arc\,tang} p + \frac{1}{b}\,l\left(\frac{p}{p-b}\right),$$

équations qui définissent la courbe roulante.

Problèmes connexes.

On peut rattacher au problème de M. de Beaune une série de questions relatives à la transformation des courbes ou à la formation de courbes associées suivant une loi particulière. Ces diverses questions peuvent être réparties en trois classes principales :

Première classe. — Étant donnée une courbe $y' = f(x)$, trouver une courbe (y, x) telle que l'on ait en tout point l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y - y'}{a},$$

a étant une longueur donnée constante. C'est le problème dont nous venons de nous occuper.

Deuxième classe. — Étant donnée une courbe $y = F(x)$, trouver la courbe $y' = f(x)$ qui satisfera à la même équation (1). La solution est immédiatement donnée par l'équation

$$y' = y - a\frac{dx}{dy} = F(x) - \frac{a}{F'(x)}.$$

Troisième classe. — Sans donner aucune courbe, on impose aux deux ordonnées y, y', qui répondent à une même abscisse x, une relation déterminée $y' = \varphi(y)$, la fonction φ étant donnée. Il viendra

$$x = \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{a}\int \varphi(y)\,dy,$$

et la solution sera connue par une quadrature. Il est inutile d'ajouter une constante ; car l'origine est arbitraire sur l'axe des abscisses, et cette constante ne ferait que déplacer la courbe le long de l'axe, sans influer sur sa forme.

Nous examinerons à part quelques cas particuliers de cette dernière classe de questions.

1° *Rapport constant h entre les deux ordonnées*; $y' = hy$. — On aura pour la courbe cherchée

$$x = \frac{y^2}{2a}(1 - h),$$

et pour la courbe associée

$$x = \frac{y'^2(1 - h)}{2ah^2}.$$

Les deux courbes sont donc des paraboles de même axe et de même sommet.

2° *Différence constante f entre les deux ordonnées*; $y - y' = f$. — On obtiendra deux droites parallèles

$$ax = fy,$$
$$ax = fy' + f^2.$$

3° *Somme constante $2f$ des deux ordonnées*; $y + y' = 2f$. — On parviendra à la relation

$$x = \frac{y^2 - 2fy + C}{a},$$

où C désigne une constante, qu'on peut faire égale à f^2. On aura donc

$$x = \frac{(y - f)^2}{a},$$

et la courbe associée sera, en remplaçant y par $2f - y'$,

$$x = \frac{(f - y')^2}{a},$$

équation identique à la précédente, et qui montre que la parabole, ayant pour axe la droite $y = f$, est à elle-même sa courbe associée. La sous-normale est constante, mesurée sur l'axe, et égale à $\frac{1}{2}a$. Mesurée à la hauteur du point M' où l'ordonnée MP recoupe la parabole; elle

sera double et égale à a; et la somme des deux ordonnées y, y' sera égale à $2f$.

4° *Produit constant des ordonnées*; $yy'=f^2$. — On aura

$$y'=\frac{f^2}{y}$$

et

$$y-y'=y-\frac{f^2}{y}.$$

L'intégration donne pour la courbe (y,x)

$$x=\frac{y^2}{2a}-\frac{f^2}{a}\,l\left(\frac{y}{a}\right),$$

et la courbe associée est celle qu'on déduit de la courbe (x,y) en opérant la transformation *par ordonnées réciproques*, $y'=\frac{f^2}{y}$, ce qui donne pour son équation

$$x=\frac{f^4}{2ay'^2}-\frac{f^2}{a}\,l\left(\frac{f^2}{ay'}\right).$$

5° *Somme des carrés constante*; $y^2+y'^2=f^2$. — On aura

$$y'=\sqrt{f^2-y^2},$$

$$dx=\frac{y-\sqrt{f^2-y^2}}{a}\,dy.$$

Si l'on pose $y=f\sin\varphi$, on trouvera pour l'équation de la courbe cherchée

$$ax=\tfrac{1}{2}f^2(\sin^2\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi-\varphi),$$

équation qu'on rapprochera successivement des équations

$$y=f\sin\varphi,$$

$$y'=f\cos\varphi,$$

pour avoir les courbes associées.

6° *Différence des carrés constante*; $y^2 - y'^2 = f^2$. — Il vient

$$y' = \sqrt{y^2 - f^2}$$

et

$$dx = \frac{f^2\,dy}{a(y + \sqrt{y^2 - f^2})}.$$

L'ordonnée y devant être supérieure à f en valeur absolue, nous ferons

$$y = \frac{f}{\cos\varphi}.$$

La substitution conduit à l'équation différentielle

$$dx = \frac{f^2}{a}\,\frac{\tang\varphi\,d\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

en supprimant le facteur $\frac{f}{\cos\varphi}$ aux deux termes de la fraction. On peut ramener cette fonction à une fraction rationnelle en posant $\tang\frac{\varphi}{2} = u$. On en déduit

$$\sin\varphi = \frac{2u}{1 + u^2}, \qquad \tang\varphi = \frac{2u}{1 - u^2}, \qquad d\varphi = \frac{2\,du}{1 + u^2},$$

et enfin

$$dx = \frac{f^2}{a}\,\frac{4u\,du}{(1 - u)(1 + u)^3}.$$

On fera la décomposition de la fraction donnée en fractions simples, ce qui donne

$$dx = \frac{f^2}{a}\left[\frac{1}{2}\,\frac{du}{1 - u} - \frac{2\,du}{(1 + u)^3} + \frac{du}{(1 + u)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{du}{1 + u}\right]$$

et, par conséquent, en intégrant,

$$x = \frac{f^2}{a}\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) + \frac{1}{(1 + u)^2} - \frac{1}{1 + u}\right].$$

Remplaçons u par $\tang\frac{\varphi}{2}$; nous aurons pour l'équa-

tion de la courbe (x, y) les deux relations

$$x = \frac{f^2}{a}\left[l\sqrt{\frac{1 + \tang\frac{\varphi}{2}}{1 - \tang\frac{\varphi}{2}}} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \tang\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{f^2}{a}\left[l\sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{\cos 2\varphi}} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \tang\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right],$$

$$y = \frac{f}{\cos\varphi}.$$

La courbe conjuguée sera représentée par la première de ces deux équations, jointe à la relation

$$y' = \sqrt{\frac{f^2}{\cos^2\varphi} - f^2} = f\tang\varphi.$$

[M⁴m]

SUR QUELQUES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

Par M. Henri PICCIOLI.

On a cru jusqu'à présent que la courbe gauche nommée *hélice cylindro-conique* était placée sur un cône de révolution. Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer que ce n'est pas vrai, au moins dans le cas général. Les raisonnements que nous allons faire nous conduiront à trouver une formule d'où résultera tout de suite la vérité de notre assertion. Ceci formera l'objet du premier paragraphe de cette Note; dans le second, j'expose des propriétés relatives aux loxodromies et aux géodésiques du cône.

I.

Admettons que si A, B, C représentent les distances d'un point fixe de l'espace $P_0 \equiv (x_0 y_0 z_0)$ aux plans normal, rectifiant, osculateur d'une courbe gauche L dont s est l'arc, ρ et T les rayons de courbure, on a les formules

$$\frac{dA}{ds} = \frac{B}{\rho} - 1, \qquad \frac{dB}{ds} = -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T}, \qquad \frac{dC}{ds} = \frac{B}{T}.$$

Cela posé, soit $(\cos a, \cos b, \cos c)$ une direction fixe, et θ l'angle que les génératrices du cône, qui projette de P_0 la courbe L, font avec cette direction. Nous aurons

$$(x_0 - x)\cos a + (y_0 - y)\cos b + (z_0 - z)\cos c = l\cos\theta,$$

l représentant la portion de génératrice du cône comprise entre le sommet et le point (xyz) de la courbe.

En dérivant, on obtient

$$(1) \qquad \frac{dl}{ds}\cos\theta + l\frac{d\cos\theta}{ds} = -\cos\varphi,$$

φ étant l'angle de la direction fixe avec les tangentes de L.

Or on a

$$l = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

et par conséquent

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{A}{l} = -\cos\psi,$$

ψ étant l'angle sous lequel la courbe L coupe les génératrices du cône.

En substituant dans (1) cette valeur, on trouve la formule

$$-\cos\theta\cos\psi + l\frac{d\cos\theta}{ds} = -\cos\varphi,$$

d'où il suit ce qu'on voulait ; car, de l'hypothèse que φ et ψ soient constants, il ne résulte pas que θ aussi doit être constant.

Il en résulte en outre que la condition

$$\cos\varphi = \cos\theta \cos\psi \qquad (\theta \text{ const.})$$

est caractéristique pour les lignes placées sur le cône de révolution : ce qu'on peut aussi démontrer géométriquement.

II.

(A). Nous allons trouver une propriété caractéristique des loxodromies du cône. Partons pour cela de la formule

$$\cos\psi = \frac{A}{l},$$

où les quantités qui y figurent ont la même signification que plus haut. En dérivant et en posant dans cette dérivée $l\cos\psi$ à la place de A, on trouve

$$l\frac{d\cos\psi}{ds} = \frac{B}{\rho} - \sin^2\psi.$$

Si ψ est constant, il en résulte

$$B = \rho \sin^2\psi,$$

c'est-à-dire que :

Le long d'une loxodromie du cône, la distance du plan rectifiant au sommet est proportionnelle au rayon de première courbure. Le coefficient de proportionnalité est une quantité comprise entre zéro et l'unité.

Au moyen de cette propriété, on pourrait, d'une manière très simple, écrire l'équation intrinsèque des loxodromies du cône, et en déduire les équations de

l'hélice cylindro-conique en y ajoutant la condition

$$\frac{\rho}{T} = \cot\varphi \qquad (\varphi \text{ const.}).$$

(B). Pour arriver à la recherche de la propriété des géodésiques du cône, étudions les courbes pour lesquelles la distance des tangentes à un point fixe est constante.

On aura donc

$$B^2 + C^2 = \text{const}.$$

En dérivant, on trouve les conditions

$$A = 0, \qquad \frac{1}{\rho} = 0, \qquad B = 0.$$

Le premier cas correspond aux lignes sphériques, ce qui ne donne rien de nouveau, de même que le second, où il s'agit d'une droite. Le dernier cas correspond aux géodésiques du cône (¹).

Il s'ensuit que :

Hormis les lignes sphériques, il n'y a, parmi les courbes à double courbure, que les géodésiques du cône qui jouissent de la propriété que leurs tangentes soient à la même distance d'un point fixe (*sommet du cône*).

On peut aussi énoncer ce résultat sous cette forme :

Les podaires des géodésiques du cône sont des lignes sphériques.

Ces théorèmes subsistent même dans l'espace à n dimensions.

(¹) *Voir* ma *Note sur les géodésiques du cône* (ce Journal, 1898).

[P1a]

ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE DEUX MIROIRS SPHÉRIQUES;

PAR M. LEFEBVRE.

I. — RÉFLEXION PAR UN MIROIR SPHÉRIQUE.

Soit un miroir sphérique de foyer F, de distance focale f; une droite O perpendiculaire à l'axe principal xy en B; I son image perpendiculaire à l'axe en B'. Nous admettrons que

$$\overline{FB}.\overline{FB'} = f^2, \tag{1}$$

$$\frac{I}{O} = \frac{f}{\overline{FB}}. \tag{2}$$

L'image I est droite, si elle est, par rapport à F, du côté du sommet; renversée si elle est, par rapport à F, du côté du centre de courbure du miroir.

Il résulte de (1) que les points B de l'axe et leurs conjugués B' forment une involution ayant l'axe pour base, le foyer F pour point central et f^2 pour puissance. Nous l'appellerons *involution relative au miroir m.*

Sur un rayon vecteur $F\omega\omega'$, prenons deux points ω et ω' tels que

$$\overline{F\omega}.\overline{F\omega'} = f^2,$$

Fig. 1.

ωB et $\omega' B'$ seront deux droites antiparallèles par rapport à l'angle F.

Règle I. — Par suite, pour construire le conjugué B′ de B, mener la circonférence passant par B, ω et ω′; elle coupe l'axe en B′.

En particulier, si $\overline{F\omega} = f$, ω et ω′ coïncident; la circonférence à mener serait la circonférence passant par B et tangente en ω à F ω.

D'après (1) et (2), on voit que

$$(3) \qquad \pm\frac{1}{O} = \frac{f}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FB'}}{f} = \sqrt{\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}}.$$

Considérons une circonférence quelconque passant par deux points homologues réels ou imaginaires C, C′ de l'involution relative au miroir *m*.

BB′, CC′ et O étant deux couples de points homologues et le point central d'une involution

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{B'C'}.\overline{B'C}}{\overline{BC'}.\overline{BC}}.$$

Par suite, en appelant π(B) la puissance de B par rapport à la circonférence C ω ω′ C′,

$$(4) \qquad \pm\frac{1}{O} = \sqrt{\frac{\overline{B'C'}.\overline{B'C}}{\overline{BC'}.\overline{BC}}} = \frac{\sqrt{\pi(B')}}{\sqrt{\pi(B)}}.$$

La circonférence C ω ω′ C′ a une très grande indétermination; elle n'est assujettie qu'à passer par deux points homologues de l'involution relative au miroir *m*. D'où ce théorème :

Si par deux points homologues quelconques d'une involution, on mène une circonférence quelconque, le rapport des puissances de deux points conjugués de l'involution par rapport à cette circonférence est invariable.

Et cette règle :

Règle II. — Le rapport de l'image à l'objet par rapport à un miroir sphérique est égal au rapport des racines carrées des puissances de leurs pieds sur l'axe par rapport à une circonférence coupant l'axe en deux points homologues de l'involution relative au miroir.

En particulier, tout point ω à distance f de F peut être regardé comme une circonférence évanouissante répondant aux conditions énoncées. Donc :

Règle III. — Étant donné un point ω à distance f de F, le rapport de l'image à l'objet est égal au rapport des distances des pieds sur l'axe au point ω.

II. — Réflexion par deux miroirs.

Soient F et Φ les foyers des miroirs m et μ; f et φ leurs distances focales. Soient O une droite objet perpendiculaire à l'axe en B, I′ son image par rapport à m perpendiculaire à l'axe en B′, I″ l'image de I′ par rapport à μ perpendiculaire à l'axe en B″.

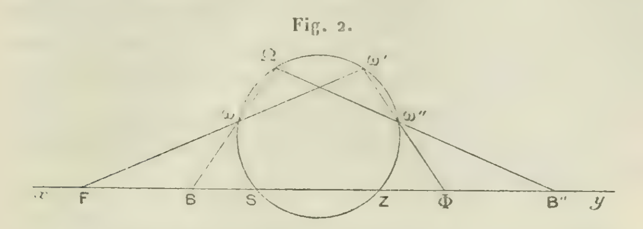
Les points B de l'axe et leurs conjugués B′ déterminent sur l'axe une involution, l'involution relative au miroir m. De même les points B′ de l'axe et leurs conjugués B″ par rapport à μ déterminent sur l'axe une involution ayant l'axe pour base, le foyer pour point central, φ^2 pour puissance; nous l'appellerons l'*involution relative au miroir* μ.

Il en résulte que les points B et B″ déterminent deux divisions homographiques ayant l'axe pour base commune; F et Φ en sont des points homologues. Nous les appellerons *divisions homographiques relatives à deux réflexions.*

Soient S et Σ les points doubles réels ou imaginaires

de ces deux divisions. Par S et Σ menons une circonférence $S\Sigma\omega'$ et joignons $\omega'\omega F$, $\omega'\omega''\Phi$.

Fig. 2.



Si un point mobile Ω *décrit une circonférence, les droites* $\Omega\omega$, $\Omega\omega''$ *qui joignent ce point à deux points fixes sur la circonférence forment deux faisceaux homographiques.* Ces faisceaux détermineront ici sur xy deux divisions homographiques, dont S et Σ seront évidemment les points doubles, F et Φ deux points correspondants. Ce sont donc précisément les *divisions homographiques relatives à deux réflexions.* Nous dirons que la circonférence $S\omega\omega''\Sigma$ est une circonférence polaire du système, et que ω et ω'' sont les points directeurs correspondants.

Connaissant ces éléments, il sera facile de construire le conjugué B′ de B.

D'autre part, S et Σ sont des points homologues dans chacune des involutions relatives aux miroirs m et μ. D'après ce qui a été vu [I, équation (4)], si l'on appelle $\pi(B)$ la puissance de B par rapport à $S\omega\omega''\Sigma$:

$$\pm\frac{I'}{O} = \frac{\sqrt{\pi(B')}}{\sqrt{\pi(B)}}, \qquad \pm\frac{I''}{I'} = \frac{\sqrt{\pi(B'')}}{\sqrt{\pi(B')}},$$

et, par suite,

$$\pm\frac{I''}{O} = \frac{\sqrt{\pi(B'')}}{\sqrt{\pi(B')}}.$$

Si l'objet O vient en F, l'image I″ vient en Φ : elle

est droite si les miroirs sont d'espèce contraire, renversée s'ils sont de même espèce (concaves ou convexes). Si l'objet se déplace, le sens de l'image ne change que quand elle passe par l'infini, c'est-à-dire quand B' passe en Φ; autrement dit, quand $B\Omega B''$ qui était égal à $\omega\omega'\omega''$ prend une valeur supplémentaire.

En résumé, si l'on connaît une circonférence polaire et les points directeurs.

Règle IV. — Pour construire le conjugué B'' de B, mener $B\omega$ qui rencontre la circonférence polaire en Ω, joindre $\Omega\omega''$: cette droite coupe l'axe en B''. Le rapport de l'image à l'objet est égal au rapport des racines carrées des puissances de B'' et B par rapport à la circonférence polaire.

Pour deux miroirs de même espèce, l'image est renversée si $\widehat{B\Omega B''}$ et $\widehat{\omega\omega'\omega''}$ sont égaux, droite si ces angles sont supplémentaires. C'est l'inverse pour des miroirs d'espèce contraire.

En particulier, si les points doubles S et Σ des divisions homographiques relatives à deux réflexions sont imaginaires, on sait que ces divisions peuvent être engendrées par la rotation d'un angle constant autour de son sommet. Ce sommet peut être considéré comme une circonférence évanouissante passant par S et Σ. Nous appellerons ce point *pôle optique* du système; l'angle constant, *angle caractéristique*. Ceci posé :

Règle V. — Pour obtenir le conjugué B' de B, il suffit de faire tourner $B\omega$ autour de ω de l'angle caractéristique; $B\omega$ vient alors couper l'axe en B''. Le rapport de l'image à l'objet est alors égal au rapport des distances de B'' et de B au pôle ω. Le sens de l'image sera défini comme dans le cas d'une circonférence polaire.

Un point lumineux placé en S (ou Σ) a son conjugué après une réflexion en Σ (ou S); son conjugué après deux réflexions coïncide avec lui. S et Σ sont donc les *points de Bravais* du système optique relativement à deux réflexions. En raison de leur rôle, nous les appellerons, dans la suite, *points asymptotiques* du système.

Si l'objet est en S ou Σ, il faut chercher directement le rapport des images à l'objet. D'après (3), si l'objet est en S,

$$\frac{I'}{O} = \pm\sqrt{\frac{F\Sigma}{FS}}, \qquad \frac{I''}{I'} = \pm\sqrt{\frac{\Phi S}{\Phi\Sigma}},$$

et

(5) $$\frac{I''}{O} = \pm\sqrt{\frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S}}.$$

Si l'objet est en Σ, on a de même

(6) $$\frac{I'}{O} = \pm\sqrt{\frac{FS}{F\Sigma}}, \qquad \frac{I''}{O} = \pm\sqrt{\frac{FS}{F\Sigma} : \frac{\Phi S}{\Phi\Sigma}}.$$

$\frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S}$ est le rapport anharmonique des points F, Φ, S, Σ. Posons

(7) $$\frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S} = \psi^2.$$

On aura

(8) $$\left(\frac{I''}{O}\right)_s = \psi, \qquad \left(\frac{I''}{O}\right)_\Sigma = \frac{1}{\psi}.$$

Étant données deux divisions homographiques de même base, le rapport anharmonique de deux points correspondants et de deux points doubles est constant.

On a donc, en tenant compte de (7) et remarquant que F et Φ sont correspondants,

(9) $$\frac{B\Sigma}{BS} : \frac{B''\Sigma}{B''S} = \frac{F\Sigma}{FS} : \frac{\Phi\Sigma}{\Phi S} = \psi^2,$$

relation très simple entre les positions de B, B″, Σ, S.

On peut remarquer que quand S et Σ sont réels, ψ^2 est essentiellement positif, et qu'on peut dénommer S et Σ, de façon que ψ^2 soit supérieur à 1. ψ^2 ne pourrait être égal à 1 que si F et Φ ou S et Σ coïncidaient.

III. Pôles et circonférences polaires.

Le faisceau des circonférences polaires d'un système de miroirs n'est autre que le faisceau des circonférences qui coupent orthogonalement les circonférences (F) et (Φ) décrites de F et Φ comme centres, avec f et φ comme rayons.

En effet,

$$FS.F\Sigma = f^2, \qquad \Phi S.\Phi\Sigma = \varphi^2.$$

Les circonférences polaires coupant l'axe en des points homologues de chacune des involutions relatives à m et à μ, on peut s'en servir pour appliquer la *règle II* (la *règle III*, dans le cas d'une circonférence évanouissante).

IV. — Classification des systèmes de deux miroirs.

Au point de vue de l'étude des réflexions multiples, on pourra classer les systèmes de deux miroirs d'après la nature des divisions homographiques relatives à deux réflexions, ou, ce qui revient au même, d'après le mode d'intersection des circonférences (F) et (Φ).

Divisions homographiques ayant :	Circonférences (F) et (Φ).	Systèmes.
2 points doubles imaginaires	Sécantes.	Périodiques.
2 points doubles réels	Non sécantes.	Apériodiques.
2 points doubles confondus	Tangentes.	Intermédiaires.
1 point double à l'infini...........	Concentriques.	Homofocaux.
Tous les points doubles...........	Confondues.	Singuliers.

Nous représenterons dorénavant par B_n, I_n l'image après n réflexions du point B_0, de l'objet I_0 si la dernière réflexion se fait sur le miroir μ ; par B_{-n}, I_{-n} les images après n réflexions si la dernière se fait sur le miroir m. Cette notation est rationnelle, parce que B_0 est évidemment l'image après n réflexions de B_{-n}, la dernière réflexion se faisant sur le miroir μ.

V. — Systèmes périodiques.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles S, Σ imaginaires : le système de miroirs a ses points asymptotiques S, Σ imaginaires. Les cercles (F) et (Φ) se coupent en deux points réels ; ces points peuvent être regardés comme des circonférences polaires évanouissantes : le système a deux pôles optiques symétriques par rapport à l'axe.

Soit ω l'un d'eux. D'après la règle V, on voit immédiatement que :

Pour obtenir B_{2n}, il suffira de faire tourner $B_0\omega$ autour de ω de n fois la rotation caractéristique $\widehat{F\omega\Phi}$; le point d'intersection avec l'axe sera B_{2n}.

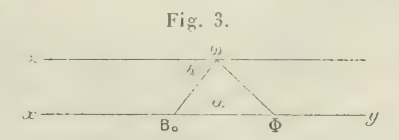
Pour obtenir B_{-2n}, il suffira d'effectuer la même rotation en sens inverse.

$B_{1\pm 2n}$ se déduira de B_1 comme $B_{\pm 2n}$ de B_0.

D'après les *règles III* et *V* :

Le rapport d'une image quelconque I_n à l'objet I_0 sera égal au rapport des distances B_n et B_0 au pôle ω.

Fig. 3.



Le sens des images se déduira aisément du cas de deux réflexions.

On peut définir la position d'un point B_0 sur l'axe par l'angle b_0 dont il faut faire tourner ωz (parallèle à yx) pour l'amener sur ωB_0.

Soient ω la valeur de la rotation caractéristique, α l'angle qui définit la position du foyer Φ sur l'axe, on a évidemment

$$(10) \quad b_1 = \alpha - b_0, \quad b_{2n} = b_0 + n\omega, \quad b_{1+2n} = \alpha - b_0 + n\omega.$$

VI. — Systèmes apériodiques.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles réels, distincts, à distance finie : ce sont les points asymptotiques du système. Les cercles (F) et (Φ) se coupent en deux points imaginaires : pas de pôles réels.

B_{2n} se déduira aisément de B_0 en répétant n fois la construction indiquée à la règle IV. B_{-2n} s'en déduira en faisant ces constructions en sens inverse. $B_{1\pm 2n}$ se déduira de B_1 comme $B_{\pm 2n}$ de B_0.

D'après les règles II et IV, le rapport d'une image quelconque I_n à l'objet I_0 est égal au rapport des racines carrées des puissances de B_n et B_0 par rapport à une circonférence polaire. Le sens se déterminera sans difficulté.

D'après l'équation (9), on a, entre B_0 et B_2, la relation

$$\frac{B_2\Sigma}{B_2 S} = \frac{1}{\psi^2}\,\frac{B_0\Sigma}{B_0 S}.$$

Par suite,

$$(11) \quad \frac{B_{2n}\Sigma}{B_{2n} S} = \left(\frac{1}{\psi^2}\right)^n \frac{B_0\Sigma}{B_0 S}, \qquad \frac{B_{1+2n}\Sigma}{B_{12+n} S} = \left(\frac{1}{\psi^2}\right)^n \frac{B_1\Sigma}{B_1 S}.$$

D'ailleurs, d'après la remarque qui termine II, ψ^2 est plus grand que 1. Il en résulte que deux images comprennent les *deux* points S et Σ ou n'en comprennent

aucun. D'autre part, B_{2n} et B_{1+2n} tendront vers le point asymptotique Σ, si la dernière réflexion se fait sur μ, ($n > 0$); vers le point asymptotique S, si la dernière réflexion se fait sur m, ($n < 0$). Pour un objet qui n'est ni en S, ni en Σ, les quatre groupes d'images tendent en position vers l'un des points asymptotiques (selon le groupe), en grandeur vers O.

Pour un objet placé en S, les images d'ordre pair se font en S, les images d'ordre impair en Σ. D'après les équations (3) et (8)

$$(12) \qquad \frac{I_{2n}}{I_0} = \pm \psi^n, \qquad \frac{I_{1+2n}}{I_0} = \pm \sqrt{\frac{F\Sigma}{FS}}\, \psi^{n+1},$$

les images tendent vers O ou croissent indéfiniment, selon que la dernière réflexion se fait sur m ou sur μ ($n < 0$ ou $n > 0$).

Ce serait le contraire pour un objet placé en Σ.

VII. — Systèmes intermédiaires.

Les divisions homographiques relatives à deux réflexions ont leurs points doubles confondus en O. Les cercles (F) et (Φ) sont tangents en ce même point. Ce point est à la fois point asymptotique et pôle optique. Toutes les circonférences polaires sont tangentes à l'axe en ce point.

Ce cas se présente si le centre ou le sommet du premier miroir coïncident avec le centre sur le sommet du second.

La construction de B_n se fera comme dans un système apériodique. Le rapport de l'image I_n à l'objet I_0 est égal au rapport des distances de B_n et B_0 au pôle O (comme dans un système périodique).

Étant données deux divisions homographiques ayant

leurs points doubles confondus, la différence des inverses des distances au point double est constante pour deux points correspondants.

Donc

$$\frac{1}{\overline{OB_2}} - \frac{1}{\overline{OB_0}} = \frac{1}{\overline{O\Phi}} - \frac{1}{\overline{OF}}.$$

Par suite,

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{OB_{2n}}} = \dfrac{1}{\overline{OB_0}} + n\left(\dfrac{1}{\overline{O\Phi}} - \dfrac{1}{\overline{OF}}\right), \\ \dfrac{1}{\overline{OB_{2n+1}}} = \dfrac{1}{\overline{OB_1}} - n\left(\dfrac{1}{\overline{O\Phi}} - \dfrac{1}{\overline{OF}}\right). \end{cases}$$

Pour un objet qui n'est pas placé en O, les quatre groupes d'images tendent vers le point asymptotique O; en même temps elles décroissent indéfiniment. Pour un objet placé en O, toutes les images se font en O et sont égales à l'objet; elles ne seraient toutes de même sens que dans le cas (peu intéressant) de deux miroirs se touchant par leurs sommets.

VIII. — Systèmes homofocaux et singuliers.

Dans les systèmes homofocaux, les deux divisions homographiques relatives à deux réflexions sont semblables; un des points doubles est rejeté à l'infini, le second est au foyer commun F. Les circonférences (F) et (Φ) sont concentriques. Il n'y a plus ni pôle, ni circonférence polaire. On voit immédiatement que

$$(14)\qquad \frac{\overline{FB_{2n}}}{\overline{FB_0}} = \left(\frac{\varphi^2}{f^2}\right)^n, \qquad \frac{\overline{FB_{1+2n}}}{\overline{FB_1}} = \left(\frac{\varphi^2}{f^2}\right)^n,$$

$$(15)\qquad \frac{I_{2n}}{I_0} = \pm\left(\frac{\varphi}{f}\right)^n, \qquad \frac{I_{1+2n}}{I_1} = \mp\left(\frac{\varphi}{f}\right)^n,$$

Soit μ le miroir de plus grande distance focale ($\varphi > f$)

Les images subissant la dernière réflexion sur m tendent vers le point asymptotique F en décroissant indéfiniment ($n < 0$); les images subissant la dernière réflexion sur μ s'éloignent indéfiniment en grandissant indéfiniment ($n > 0$). Pour un objet placé en F, toutes les images se font en F, mais diffèrent de grandeur; les images d'ordre impair sont infiniment éloignées et infiniment grandes.

Dans les systèmes singuliers, où les distances focales sont égales, en même temps que les foyers coïncident, les deux divisions homographiques relatives à deux réflexions sont identiques, les circonférences (F) et (Φ) coïncident. Quel que soit B_0, B_{2n} coïncide avec B_0, B_{1+2n} avec B_1. I_2 ne peut différer que par le sens de I_0; de même I_3 de I_1 (même sens si les miroirs sont d'espèce contraire, sens contraire s'ils sont de même espèce). $I_{n+4\mu}$ coïncide en tout cas avec I_n; chaque objet a donc au plus quatre images symétriques deux à deux par rapport à l'axe; il n'y aurait que deux images dans le cas (peu intéressant) où les miroirs sont d'espèce contraire (ils se toucheraient par leurs sommets).

IX. — Nombre des images.

En général, le nombre d'images d'un point ou d'un objet perpendiculaire à l'axe, données par un système de deux miroirs, est illimité. Ce nombre peut être limité, s'il se produit des coïncidences d'images.

Si un système de miroirs possède des points asymptotiques, le nombre des images d'un point de l'axe est illimité, sauf si le point coïncide avec l'un des points asymptotiques.

Les images d'un point qui diffère des points asym-

ptotiques *tendent* vers l'un de ces points : elles sont donc en nombre illimité. Les images d'un point asymptotique sont l'un des points asymptotiques (*voir* VI, VII, VIII); il y en a donc *deux* pour les systèmes apériodiques et homofocaux, *une* pour les systèmes intermédiaires (l'objet étant compté).

Dans un système singulier (voir VIII), *tout point de l'axe a deux images (y compris l'objet) : elles coïncident pour les centres et sommets.*

Dans un système périodique, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de l'axe ait un nombre limité d'images est que l'angle caractéristique ω soit commensurable avec la circonférence. Si cette condition est satisfaite, tout point de l'axe a un nombre limité d'images.

Si le nombre d'images est limité, on peut trouver une image de rang pair de B_0 qui coïncide avec B_0 : soit B_{2n}. D'après (10)

$$b_{2n} = b_0 + n\omega.$$

Si B_0 et B_{2n} coïncident, b_{2n} et b_0 diffèrent d'un nombre entier de demi-circonférences : donc $n\omega$ est un nombre entier de demi-circonférences et ω est commensurable avec la circonférence.

Inversement, si ω est commensurable avec la circonférence, on peut trouver n tel que $n\omega$ soit multiple de la demi-circonférence, mais alors, comme

$$b_{p+2n} = b_p + n\omega,$$

les images B_{p+2n} et B_p coïncideront : il y aura au plus $2n$ images d'un point quelconque de l'axe B_0.

Pour qu'un objet perpendiculaire à l'axe I_0 ait un

nombre limité d'images, il est *nécessaire* que son pied sur l'axe B_0 ait un nombre limité d'images.

Dans les systèmes qui admettent des points asymptotiques, cela ne peut se produire que si B_0 en est l'un de ces points. Mais les images seront en nombre illimité, car elles ont toutes des grandeurs différentes (*voir* VI, VII, VIII) dans les systèmes apériodiques et homofocaux. Au contraire (*voir* VII), un objet placé au point asymptotique unique d'un système intermédiaire a *deux images* distinctes seulement, symétriques par rapport à l'axe (l'objet compté), *une seule* si les miroirs sont opposés par leurs sommets.

Dans les systèmes singuliers, tout objet a au plus quatre images distinctes (y compris l'objet); elles peuvent se réduire à une si les miroirs sont opposés par leurs sommets et l'objet placé en ce sommet (voir VIII).

Dans les systèmes périodiques, où l'angle caractéristique est commensurable avec la circonférence, tout objet a un nombre limité d'images.

Cette condition est nécessaire pour que le pied de l'objet ait un nombre limité d'images. Si elle est satisfaite, le nombre de *positions* des images est limité. Mais si deux images ont même position, elles sont égales, car le rapport de leurs grandeurs (règle V) est égal au rapport des distances de leurs pieds au pôle; elles ne peuvent différer que par le sens (elles ont même sens si $n\omega$ est un multiple de la circonférence, sens contraire si c'est un multiple impair de la demi-circonférence). En tout cas, le nombre des images d'un objet est au plus double de celui de son pied; il est donc limité.

Si l'on résout en nombres entiers l'équation

$$n\omega = 2k\pi.$$

la plus petite valeur de n, qui soit solution, indique une valeur maxima du nombre d'images d'un point, $2n$ une valeur maxima du nombre d'images d'un objet. Ce nombre est abaissé si des images de parité différente coïncident.

En résumé, *le nombre d'images est limité pour tout objet :* 1° dans les systèmes singuliers; 2° dans les systèmes périodiques où l'angle caractéristique est commensurable avec la circonférence.

X. — Effet de n réflexions.

$2n+1$ réflexions se faisant alternativement sur deux miroirs, m et μ, peuvent toujours se remplacer par une réflexion unique sur un miroir convenablement choisi.

En effet, un point B_0 de l'axe et son image B_{2n+1} déterminent sur l'axe deux divisions homographiques. Dans ces divisions, S et Σ sont des points correspondants, que l'on regarde S comme appartenant à l'une ou à l'autre; donc ces divisions sont en involution.

Le point central de cette involution est l'image F_{+2n} après $2n$ réflexions (la première sur m) du foyer F du miroir M. Comme F, il sera extérieur à $S\Sigma$.

On pourra alors remplacer les $2n+1$ réflexions par une réflexion unique sur un miroir de foyer F_{2n}, par rapport auquel S et Σ seraient conjugués. Il est clair que non seulement la position, mais la grandeur et le sens de l'image seront les mêmes.

Si le miroir unique est sphérique, son centre et son sommet coïncideront avec leurs images après $2n+1$ réflexions. Des objets placés en ces points auraient, l'un une image symétrique, l'autre une image identique.

Si le miroir unique est plan, l'objet coïncide avec l'image s'il est dans le plan; il est symétrique de l'image

par rapport au plan ; en général $2n$ réflexions pourraient être remplacées par deux réflexions.

Conclusions.

Nous nous sommes proposé d'étudier les réflexions multiples qui se produisent dans un système de deux miroirs sphériques. Ce problème correspond au problème des miroirs plans parallèles. Le cas d'un miroir sphérique et un miroir plan se déduirait de suite de notre étude.

Nous avons donné une classification des systèmes de miroirs fondée sur l'homographie, et montré comment les théories de l'involution et de l'homographie permettent de construire et de déterminer les éléments des images.

Enfin nous avons recherché les conditions pour que le nombre des images d'un point ou d'un objet soit limité.

Les systèmes donnant de *tout objet*, après un certain nombre de réflexions, une image coïncidant avec l'objet, *quelle que soit la position de cet objet,* seront les seuls donnant de *tout objet* un nombre d'images limité. On peut les définir ainsi :

Pour qu'un système de miroirs donne de tout objet un nombre limité d'images, il faut : 1° que l'on puisse construire un triangle ayant pour côtés les deux distances focales et la distance des foyers (ce triangle ne se réduisant pas à l'axe) ; 2° que l'angle de ce triangle, opposé à la distance des foyers, soit commensurable avec la circonférence.

NOTE.

Étant données deux divisions homographiques de même base, le rapport anharmonique de deux points correspondants M_1, M_2 *et des deux points doubles* E, F *est constant*

$$\frac{M_2 E}{M_2 F} : \frac{M_1 E}{M_1 F} = K.$$

Soient M_2, M_3, ..., M_{n+1} les points correspondants à M_1, M_2, ..., M_n

$$\frac{M_{n+1} E}{M_{n+1} F} : \frac{M_1 E}{M_1 F} = K^n.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que M_{n+1} coïncide avec M_1 (sans être en E ou F) est que K soit une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. La coïncidence aura alors lieu quel que soit M_1.

Cela ne peut arriver que si les divisions sont identiques ($K = 1$) ou en involution ($K = -1$); ou si, ayant leurs points doubles imaginaires, elles peuvent être engendrées par des faisceaux homographiques de même centre, dont les rayons correspondants font un angle constant égal au $n^{\text{ième}}$ d'un multiple entier de 180°.

Deux divisions homographiques répondant à ces conditions peuvent être considérées comme généralisation de deux divisions en involution. La transformation involutive répétée deux fois reproduit la figure primitive; la transformation homographique considérée, répétée n fois, la reproduit de même.

La division formée par les n points consécutifs correspondants M_1, M_2, ..., M_n, lorsque K est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, peut de même être regardée comme généralisation de la division harmonique. Quatre de ces points ont pour rapport anharmonique l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, dans les mêmes conditions où les quatre points d'une division harmonique ont pour rapport anharmonique -1.

La considération de ces généralisations de l'involution et de la division harmonique semblerait indiquée dans les questions où l'on a à considérer des angles commensurables avec la circonférence ou des lignes polygonales qui se ferment. Un exemple :

Un angle inscrit à une conique et circonscrit à une deuxième

conique, bitangente à la première, détermine sur une tangente à la deuxième deux divisions homographiques ayant pour points doubles les points d'intersection avec les tangentes communes et dans lesquelles le point de contact de la deuxième conique correspond à l'un et l'autre des points d'intersection de la première. Donc : la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire et circonscrire aux deux coniques un même polygone de n côtés est que ces deux divisions homographiques soient des divisions généralisant des divisions en involution, K étant une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. Il y aura alors une infinité de polygones de n côtés jouissant de la même propriété. Toute tangente à la conique inscrite sera divisée par les côtés, suivant une division à n points généralisant la division harmonique; des droites convenablement choisies seraient divisées de même par les diagonales.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1899 (DEUXIÈME SESSION).

Géométrie analytique.

On donne un système d'axes rectilignes OX et OY.

1° Former l'équation générale du lieu (Δ) du point de rencontre des polaires d'un point $M(\alpha, \beta)$ par rapport aux coniques $f = 0$, $f_1 = 0$, lorsque le point M se déplace sur une droite $(D)\, mx + ny + p = 0$.

Démontrer que les polaires d'un point de (D) par rapport aux coniques, passant par les quatre points d'intersection de $f = 0$, $f_1 = 0$, pivotent autour d'un point de Δ.

2° Démontrer que, quelle que soit la droite (D), le lieu Δ passe par les centres des trois systèmes de cordes communes aux coniques $f = 0$, $f_1 = 0$.

Donner l'équation générale des coniques qui passent par les centres des trois systèmes de cordes communes aux coniques $f = 0, f_1 = 0$.

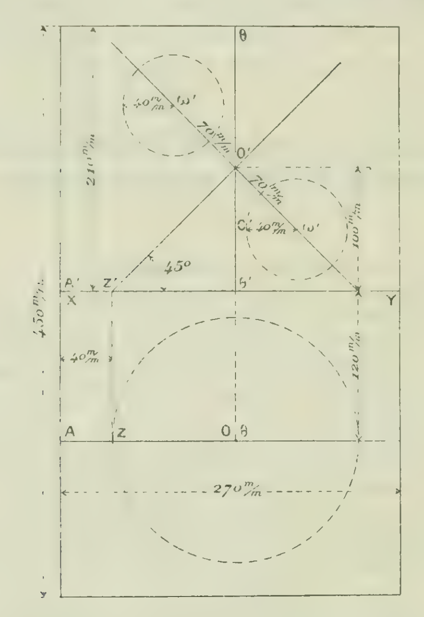
3° Démontrer que le lieu Δ se réduit à deux droites si la conique $f_1 = 0$ est bitangente à la conique $f = 0$ suivant une droite $A = 0$.

Démontrer que le lieu (Δ) est le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère des points d'intersection de $f = 0$ et $f_1 = 0$ si la droite (D) s'éloigne à l'infini.

4° Comme application, former l'équation de la conique Δ correspondant au cercle $(x - r)^2 + (y - s)^2 - t^2 = 0$ et à l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; puis former les équations des droites dont se compose la conique Δ dans le cas où le cercle serait remplacé par une conique bitangente à $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ suivant la droite $ux + vy + w = 0$.

Épure.

On demande de représenter par ses contours apparents un tore circulaire de révolution défini de la manière suivante :



L'axe (O'Z'OZ) est de front, incliné à 45° sur le plan horizontal :

Distance	A'Z' = AZ =	40 mm
Cote du centre O	=	100
Éloignement du centre O ..	=	120

Le cercle générateur a un rayon de 40^{mm} et le centre de ce cercle décrit une circonférence dont le rayon $O'\omega' = 70^{mm}$.

On laissera trace complète des constructions faites pour obtenir un point courant du contour apparent horizontal.

Cela fait, on déterminera l'intersection du tore avec le cône engendré par la révolution de la droite OZO'Z' autour de la verticale du point OO'.

On représentera le tore en enlevant de ce corps la portion contenue dans le cône de révolution (dont on considérera les deux nappes).

Cadre de 270^{mm} sur 450^{mm}.

Ligne de terre XY parallèle aux petits côtés du cadre et à 210^{mm} du côté supérieur.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Tore et cône.

BIBLIOGRAPHIE.

Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la Science contemporaine, par M. *A. Hannequin*, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. 1 vol. in-8° de la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*. 2e édition, 7fr,50 (Félix Alcan, éditeur).

On peut se demander encore de nos jours si l'atomisme est l'hypothèse sur laquelle repose la Physique tout entière, ou s'il n'en serait pas plutôt le résultat, la conclusion la plus certaine, certaine de la certitude des autres conclusions ; on ne peut plus douter, en tout cas, qu'il ne soit l'expression la plus haute et comme l'âme de notre Science de la nature.

Les théories contemporaines sont sur ce point d'accord avec l'histoire : elles consacrent la prépondérance, dans le domaine scientifique, de l'hypothèse atomistique.

M. Hannequin s'est proposé, en partant des principes premiers de la connaissance mathématique et en étudiant la constitution et les progrès principaux des Sciences physiques et chimiques, d'établir à la fois la *nécessité* de l'atomisme et ses

contradictions; puis il demande à la *Métaphysique* la *conciliation* de ces dernières.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1790.

(1898, p. 148.)

A quelles conditions peut-on trouver sur une quadrique un point P, *tel que tout cône ayant pour sommet ce point et pour base une section par un plan quelconque parallèle à une droite donnée, soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit? Ces conditions étant supposées remplies, combien y a-t-il de points* P? (R. Gilbert.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

La condition est évidemment que la quadrique donnée soit un hyperboloïde équilatère, puisque le plan sécant peut s'éloigner à l'infini. Si cette condition est remplie, on vérifie sans peine qu'il y a deux points P satisfaisant à la question : ce sont les points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde perpendiculaires à la droite donnée.

QUESTIONS.

1830. Soient A un point d'une conique dont l'un des foyers est le point F, T le point de rencontre de la tangente au point A avec l'axe; au point A sur AF et au point T sur AT, on élève des perpendiculaires qui se coupent au point S. La droite FS rencontre la normale en A au centre de courbure de la conique en ce point. (C. Servais.)

AVIS AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Rédaction des *Nouvelles Annales* publiera dans le numéro de janvier 1900 le Tableau des principales formules de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques, telle qu'elle figure au programme de l'Agrégation. Ce Tableau sera vendu par la Librairie Gauthier-Villars, et les candidats seront autorisés à s'en servir pour les compositions écrites.

[H8]

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION;

PAR M. N. SALTYKOW.

1. Le point capital de la théorie des équations en question consiste à réduire leur intégration aux équations aux différentielles ordinaires ou totales. On en connaît deux méthodes fondées sur les idées d'illustres géomètres, Lagrange et Jacobi. Toutefois les recherches qui vont suivre semblent avoir un intérêt au point de vue didactique.

Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \ldots + X_{n-1} p_n = X,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X$ sont des fonctions des variables in-

dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de leur fonction inconnue z, les p_i désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Supposons que la relation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C \tag{2}$$

définit une solution de l'équation (1), C étant une constante arbitraire. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i = 0,$$

et, par suite, l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} + X \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \tag{3}$$

est identiquement vérifiée.

Inversement, la relation (2) fournit une intégrale de l'équation (1), si f, considérée comme fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, vérifie l'équation (3). En effet, comme on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial z} p_i,$$

l'identité (3) devient

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p_1 + X_1 p_2 + \ldots + X_{n-1} p_n - X) = 0.$$

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annulant pas, par hypothèse, notre assertion devient donc évidente.

Jacobi a démontré ([1]) que *l'équation* (3) *admet n in-*

([1]) *Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum æquationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis* (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 147, n° 5).

tégrales distinctes, si elle en a une. Par conséquent. l'équation (3) étant intégrable ([1]), il existe n équations

$$(4)\qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donnant n solutions distinctes de l'équation (1), et il en résulte des identités

$$(5)\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

C_i étant des constantes arbitraires.

2. Cela posé, supposons l'équation (3) intégrable. Le problème que nous nous proposons de résoudre, c'est de *former un système d'équations différentielles ordinaires dont l'intégrale générale soit définie par le système* (4).

Il est à remarquer, en premier lieu, que le déterminant fonctionnel

$$(6)\qquad D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_n}{x_2, x_3, \ldots, z}\right)$$

ne s'annule pas, les f_i étant encore distinctes, considérées comme fonctions des $x_2, x_3, \ldots, x_n, z$ seulement. Car s'il existait une relation

$$F(x_1, f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

on en tirerait, en vertu des identités (5),

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

et les fonctions f_i ne seraient plus distinctes, contrairement à notre hypothèse. Il s'ensuit que les équations (4)

([1]) Par le mot *intégrable,* nous comprenons que l'équation (3) admet une intégrale.

sont résolubles par rapport aux $x_2, x_3, \ldots, x_n, z$. Nous sommes donc en état d'imaginer un système

$$(7) \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = Z_1, \qquad \frac{dx_3}{dx_1} = Z_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_1} = Z,$$

dont les intégrales sont représentées par les équations (4). Mais les dérivées totales de ces dernières par rapport à x_1 étant vérifiées, en vertu du système (7), on a les identités

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} Z_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} Z_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

donnant les valeurs $Z_1, Z_2, \ldots, Z$ en fonctions des f_i. Toutefois il est aisé d'obtenir les mêmes valeurs en fonctions des $X_1, X_2, \ldots$ car il suffit de recourir aux identités (5) pour en avoir de nouvelles :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(Z_1 - X_1) + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(Z_2 - X_2) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial z}(Z - X) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le déterminant (6) ne s'annulant pas, on a

$$Z_1 = X_1, \qquad Z_2 = X_2, \qquad \ldots, \qquad Z = X,$$

et le système (7) devient

$$(8) \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = X_1, \qquad \frac{dx_3}{dx_1} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_1} = X.$$

Inversement, chaque intégrale du dernier système

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C$$

fournit une solution de l'équation (1), car la fonction f satisfait à la relation (3).

Par conséquent, l'équation (3) est intégrable en même temps que le système (8).

Or, considérons le domaine où X_1, X_2, ... sont des fonctions holomorphes de toutes les variables x et z. Il est bien connu que, dans ce domaine, les équations (8) admettent n intégrales distinctes de forme (4), les fonctions f_i y étant holomorphes.

Donc, *pour le même domaine, l'équation* (1) *admet n solutions distinctes qui s'obtiennent en intégrant le système* (8).

Enfin, l'intégrale générale de l'équation (1) est représentée par la formule

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0, \tag{9}$$

Π étant une fonction arbitraire. Cette dernière intégrale jouit de la propriété bien connue de contenir toutes les solutions de l'équation (1) pour le domaine où ses coefficients restent holomorphes. Si la fonction X est nulle, l'équation (1) admet une intégrale évidente

$$z = \text{const.}$$

La formule (9) peut être mise alors sous la forme

$$z = \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}),$$

$f_1, f_1, \ldots, f_{n-1}$ présentant $n-1$ intégrales de l'équation considérée distinctes de z. C'est ainsi que l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$f = \Pi(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Nous avons toujours supposé dans les recherches précédentes que les équations (4) contiennent explicitement la variable z. Les considérations complémentaires sont donc nécessaires dans le cas contraire. Ce fait se présente, par exemple, quand les fonctions X_1, X_2, ... ne contiennent plus z. Or Jacobi a démontré dans son Mé-

moire cité plus haut ([1]) que le problème étudié revient dans ce cas de même à intégrer le système (8).

3. Passons à présent aux équations simultanées

$$(10)\qquad \begin{cases} p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} = X_k, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

les coefficients X étant des fonctions des variables x et z. On n'en étudie ordinairement que les intégrales admettant les dérivées partielles de deux premiers ordres continues. Nous le ferons de même et nous supposerons de plus que le système (10) est *jacobien* ([2]), en y comprenant que ses intégrales ne satisfont qu'aux équations (10). Il est donc nécessaire que les égalités

$$(11)\qquad \begin{cases} X^k(X_h^r) - X^h(X_k^r) = 0, \\ X^k(X_h) - X^h(X_k) = 0, \\ r = 1, 2, \ldots, n-m \end{cases}$$

soient vérifiées pour toutes les valeurs distinctes des indices h, k de 1 à m, en représentant symboliquement par X^k l'opération

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Cela posé, soit la valeur de z, tirée de l'équation

$$(12)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C,$$

une intégrale du système (10), C étant une constante ar-

([1]) *Gesammelte Werke*, Bd IV, p. 176, n° 6.

([2]) On nomme ordinairement *jacobiens* les systèmes homogènes seulement.

bitraire. On en conclut que les relations

$$X^k(f) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{13}$$

sont identiquement vérifiées.

Inversement, l'égalité (12) fournit une solution du système (10), si la fonction f satisfait aux équations (13). En effet, comme la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annule pas, notre assertion est une conséquence immédiate des identités

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(p_k + \sum_{r=1}^{n-m} X_k^r p_{m+r} + X_k\right) = 0.$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

4. On démontre aisément que les conditions (11) sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que les équations (10) soient intégrables, car *le système* (13) *possède, étant de même jacobien,* $n - m + 1$ *intégrales distinctes et holomorphes dans le domaine où les fonctions* X *le sont aussi.* Il existe, par conséquent, $n - m + 1$ équations distinctes

$$\left\{\begin{array}{l} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i, \\ i = 1, 2, \ldots, n - m + 1, \end{array}\right. \tag{14}$$

f_i étant des fonctions holomorphes, satisfaisant identiquement aux relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n-m} X_k^r \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} + X_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right. \tag{15}$$

C_i étant des constantes arbitraires. De plus, on a

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_{n-m+1}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, z}\right) \gtrless 0. \tag{16}$$

Les équations (14) sont donc résolubles par rapport

aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n, z$, et il est aisé d'en tirer ces dernières valeurs en fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et de $n - m + 1$ constantes arbitraires.

Nous sommes à présent en état d'aborder le problème fondamental de *former un système d'équations aux différentielles totales*

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} dx_{m+r} &= \sum_{k=1}^{m} Z_k^r \, dx_k, \\ dz &= \sum_{k=1}^{m} Z_k \, dx_k, \\ r &= 1, 2, \ldots, n-m, \end{aligned} \right.$$

dont les intégrales soient les équations (14). Pour obtenir les valeurs des fonctions Z, nous avons à remarquer que les différentielles totales des équations (14) donnent, en vertu du système (17), les identités

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z_k^r + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k \right) dx_k = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-m-1,$$

car il est impossible d'éliminer les constantes C_i entre les équations (14). Or les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant indépendantes, on a identiquement

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} Z_k^r + \frac{\partial f_i}{\partial z} Z_k = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-m+1,$$

l'indice k prenant toutes les valeurs de 1 à m. En y joi-

gnant les identités (15), il vient

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+r}} (Z_k^r - X_k^r) + \frac{\partial f_i}{\partial z} (Z_k = X_k) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n - m + 1.$$

L'inégalité (16) ayant lieu, nous avons

$$Z_k^r = X_k^r, \qquad Z_k = X_k.$$

Le système (17) devient donc

$$(18) \qquad \begin{cases} dx_{m+r} = \sum_{k=1}^{m} X_k^r \, dx_k, \\ dz = \sum_{k=1}^{m} X_k \, dx_k, \\ r = 1, 2, \ldots, n - m. \end{cases}$$

Inversement, on tire de chaque intégrale du dernier système une solution du (10)^{ième}, les identités (15) étant satisfaites, et les $n - m + 1$ intégrales distinctes des équations (18) en définissent les solutions requises du système (10).

Enfin la formule

$$\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-m+1}) = 0,$$

Π désignant une fonction arbitraire, représente une intégrale générale du système (10). Cette dernière jouit de la propriété remarquable de contenir toutes les solutions des équations (10) pour le domaine où leurs coefficients sont holomorphes, comme je l'ai démontré dans un cas bien plus général dans mon Travail : *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (1).

---

(1) *Journal* de M. JORDAN, p. 423; 1897.

Si les fonctions X_k étaient nulles, les équations (10) étant homogènes, l'une de leurs solutions est évidemment

$$z = \text{const.}$$

C'est-à-dire l'intégrale générale correspondante peut être représentée par la formule

$$z = \Pi(f_1, f_3, \ldots, f_{n-m}).$$

5. Les considérations citées ne sont permises que si les fonctions f_i dépendent de z, selon l'hypothèse introduite. Par suite, il est indispensable d'étudier le cas, où les équations (18) admettent des intégrales indépendantes de z,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, l, \qquad l < n - m + 1.$$

Les dernières équations sont toujours résolubles par rapport à l variables quelconques parmi $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ que nous nommerons $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+l}$. En introduisant $f_1, f_2, \ldots, f_l$ comme nouvelles variables indépendantes au lieu de ces dernières, les équations (10) deviennent

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + \sum_{s=l+1}^{n-m} (X_k^s) \frac{\partial z}{\partial x_{m+s}} = (X_k),$$
$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

les parenthèses désignant le résultat de la transformation effectuée, et forment un système jacobien. Les équations aux différentielles totales correspondantes sont présentées par les $n - m - l + 1$ équations que l'on obtient de $n - m - l + 1$ dernières du système (18), en y éliminant les variables $x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}$. Soit leur intégrale générale donnée par les équations

$$f_{l+j}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+l+1}, \ldots, x_n, z, f_1, f_2, \ldots, f_l) = C_{l+j},$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - m - l + 1.$$

Il est évident que l'intégrale générale du système examiné aux dérivées partielles est une fonction arbitraire de toutes les $n - m + 1$ fonctions f, exprimées en x et z. Par conséquent, le problème d'intégration du système (10) revient toujours à intégrer les équations (18).

[F8hγ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT AUTOUR D'UN POINT FIXE (APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES);

Par M. E. LACOUR,

Professeur-adjoint à l'Université de Nancy.

---

1. *Définition des paramètres* α, β, γ, δ. — Ayant en vue de développer un exercice sur les fonctions elliptiques à propos du mouvement de la toupie, tel qu'il est étudié dans le Livre de MM. Klein et Sommerfeld (*Theorie des Kreisels,* Leipzig, Teubner, 1897), expliquons d'abord comment il est utile de substituer aux angles d'Euler ψ, φ et θ, quatre quantités complexes α, β, γ, δ satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Soient :

$Ox_1 y_1 z_1$ le système d'axes fixes;
$Oxyz$ le système mobile;
ψ, φ et θ les angles d'Euler qui définissent à chaque instant la position du système mobile.

Supposons écrites les formules de transformation de coordonnées permettant de passer du système fixe au système mobile, les coefficients étant exprimés en fonction des angles ψ, φ et θ. Ces formules se simplifient

beaucoup si l'on fait le changement de variables défini par les égalités

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy, & \xi_1 &= x_1 + iy_1, \\ \eta &= -x + iy, & \eta_1 &= -x_1 + iy_1, \\ \zeta &= -z, & \zeta_1 &= -z_1; \end{aligned}$$

on trouve alors

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \alpha^2\xi + \beta^2\eta + 2\alpha\beta\zeta, \\ \eta_1 = \gamma^2\xi + \delta^2\eta + 2\gamma\delta\zeta, \\ \zeta_1 = \alpha\gamma\xi + \beta\delta\eta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta, \end{cases}$$

en posant

$$\alpha = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, \qquad \beta = i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}},$$

$$\gamma = i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, \qquad \delta = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}},$$

Ce sont ces quantités α, β, γ, δ, satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

que nous nous proposons d'exprimer en fonction du temps dans le problème de la toupie et qui nous conduiront à des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Mais, avant de traiter le problème de Mécanique, pour justifier l'introduction de ces éléments α, β, γ, δ, nous allons indiquer, d'après M. Klein, comment la transformation définie par les formules (1) se ramène à une substitution de la forme

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

α, β, γ, δ étant précisément les quantités complexes que nous venons de définir.

Pour cela, considérons les formules (1) comme définissant le déplacement du trièdre $Oxyz$, dont l'origine

reste fixe; un point xyz invariablement lié à ce trièdre reste sur une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon la distance R du point O au point xyz. L'équation de cette sphère, en coordonnées ξ, η, ζ, est

$$\zeta^2 - \xi\eta = R^2.$$

Nous définirons la position du point $\xi\eta\zeta$ sur la sphère à l'aide de deux paramètres λ et λ', si nous posons

$$\frac{\xi}{\lambda\lambda'} = \frac{\eta}{1} = \frac{\zeta}{\frac{\lambda+\lambda'}{2}} = \tau,$$

et si nous déterminons τ de façon que l'on ait

$$\tau^2\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2}\right)^2 = R^2.$$

Posons de même

$$\frac{\xi_1}{\lambda_1\lambda'_1} = \frac{\eta_1}{1} = \frac{\zeta_1}{\frac{\lambda_1+\lambda'_1}{2}} = \tau_1,$$

$$\tau_1^2\left(\frac{\lambda_1-\lambda'_1}{2}\right)^2 = R^2.$$

Les formules de transformation (1) peuvent alors s'écrire, en désignant par ρ un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned}
\rho\lambda_1\lambda'_1 &= (\alpha\lambda+\beta)(\alpha\lambda'+\beta),\\
\rho &= (\gamma\lambda+\delta)(\gamma\lambda'+\delta),\\
\rho(\lambda_1+\lambda'_1) &= (\alpha\lambda+\beta)(\gamma\lambda'+\delta)+(\alpha\lambda'+\beta)(\gamma\lambda+\delta);
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\lambda_1\lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}\,\frac{\alpha\lambda'+\beta}{\gamma\lambda'+\delta},$$

$$\lambda_1+\lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}+\frac{\alpha\lambda'+\beta}{\gamma\lambda'+\delta},$$

et l'on en peut facilement conclure que, pour obtenir le

déplacement défini par les formules (1), il suffit d'effectuer, à la fois sur λ et λ', les substitutions

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad \lambda'_1 = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta},$$

définies de la façon la plus simple par nos quatre paramètres α, β, γ, δ.

2. *Mise en équations du problème de Mécanique.* — La question de Mécanique à laquelle se rattache l'exercice indiqué sur les fonctions elliptiques, est l'étude du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, dans le cas considéré par Lagrange et par Poisson; on suppose que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe O est de révolution autour d'un axe passant par ce point et que le centre de gravité est sur l'axe.

Prenons pour origine le point de suspension O, pour axes liés au corps l'axe de révolution Oz et deux axes perpendiculaires, pour axes fixes la verticale ascendante Oz_1 et deux axes perpendiculaires [1].

On démontre que les angles d'Euler ψ, φ et θ, qui définissent la position des axes liés au corps par rapport aux axes fixes, sont donnés en fonction du temps par les formules suivantes. D'abord, en posant

$$\cos\theta = z,$$

on a

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\mu - mz)(1 - z^2) - (\nu - nz)^2 = f(z),$$

où m, n, μ, ν désignent des constantes dont la première m est positive, de sorte que $f(z)$ est un polynome du

---

(1) *Voir* Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques,* p. 96.

troisième degré. On a ensuite

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\nu - nz}{1 - z^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\frac{\nu - nz}{1 - z^2},$$

r_0 désignant une autre constante.

Inversion. — Pour introduire les fonctions elliptiques, on fait le changement de variable défini par l'égalité

$$z = \mathrm{M}s + \mathrm{N},$$

où M et N sont des constantes choisies de façon que l'équation transformée en s prenne la forme

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

et l'on construit la fonction pu aux invariants g_2 et g_3.

Comme $f(z)$ et, par suite, $4s^3 - g_2^s - g_3$ ont leurs racines réelles, on est dans le cas où l'on peut prendre comme périodes primitives une quantité réelle 2ω et une quantité purement imaginaire $2\omega'$.

On peut alors exprimer z en fonction uniforme du temps t par la formule

$$z = \mathrm{M}pu + \mathrm{N}, \qquad u = t + \omega',$$

le temps étant compté à partir d'une valeur pour laquelle z est égal à la plus petite racine de $f(z)$.

Pour calculer les angles ψ et φ, nous nous limiterons au cas ($n = r_0$) où l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension du solide pesant est une sphère ([1]). Alors, en introduisant deux arguments elliptiques a et b définis

([1]) *Voir* une Note de M. Darboux à la fin du *Traité de Mécanique* de Despeyrous, t. II, p. 527.

par les égalités

$$\mathrm{M}\,\mathrm{p}a + \mathrm{N} = 1, \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{p}b + \mathrm{N} = -1,$$

$$\mathrm{p}'a = i\,\frac{\nu - r_0}{\mathrm{M}}, \qquad \mathrm{p}'b = i\,\frac{\nu + r_0}{\mathrm{M}},$$

on obtient successivement

$$2i\,\frac{d\psi}{du} = \frac{\mathrm{p}'b}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}b} - \frac{\mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a},$$

$$2i\,\frac{d\varphi}{du} = \frac{\mathrm{p}'b}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}b} + \frac{\mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a}.$$

Dans les expressions de α, β, γ, δ en fonction des angles d'Euler, les angles ψ et φ n'interviennent que par leur somme ou leur différence. Nous sommes donc conduits à ces deux combinaisons des équations précédentes :

$$i\left(\frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{du}\right) = \frac{\mathrm{p}'b}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}b},$$

$$i\left(\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{du}\right) = \frac{\mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a}.$$

Calcul des paramètres α, β, γ, δ. — Nous avons obtenu pour les paramètres α, β, γ, δ des expressions qui peuvent s'écrire, en se rappelant que $z = \cos\theta$,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}, \qquad \beta = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)},$$

$$\gamma = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}, \qquad \delta = i\sqrt{\frac{1-z}{2}}\,e^{-i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)},$$

Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de chacune de ces égalités, remplaçons z, $\frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{du}$, $\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{du}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{d}{du}(\mathrm{Log}\,\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'b}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}b}, \qquad \frac{d}{du}(\mathrm{Log}\,\beta) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a},$$

$$\frac{d}{du}(\mathrm{Log}\,\gamma) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u + \mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a}, \qquad \frac{d}{du}(\mathrm{Log}\,\delta) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'b}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}b}.$$

On voit qu'on passe de α à β, γ, δ en changeant respectivement b en $-a$, a, $-b$: il nous suffira de détailler pour α les calculs d'intégration.

La décomposition en éléments simples de la fonction à intégrer est donnée ici par la formule d'addition pour la fonction ζu : à l'aide de cette formule, on trouve

$$\operatorname{Log}\alpha = \int [\zeta(u-b) - \zeta u + \zeta b]\, du,$$

$$\operatorname{Log}\alpha = \operatorname{Log}\sigma(u-b) - \operatorname{Log}\sigma u + u\zeta b + \operatorname{Log}h_1,$$

h_1 désignant une constante, puis

$$\alpha = h_1 e^{u\zeta b}\frac{\sigma(u-b)}{\sigma u}.$$

On trouve de même

$$\beta = h_2 e^{-u\zeta a}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u},$$

$$\gamma = h_3 e^{u\zeta a}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u},$$

$$\delta = h_4 e^{-u\zeta b}\frac{\sigma(u+b)}{\sigma u},$$

h_2, h_3, h_4 désignant de nouvelles constantes.

Au lieu des fonctions σ et ζ de Weierstrass, il peut être commode, pour les calculs numériques par exemple, d'introduire les fonctions H et Z de Jacobi reliées aux précédentes par les formules

$$\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma u.$$

$$\mathrm{Z}u = \zeta u - \frac{\eta}{\omega}u.$$

On trouve alors

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= C_1 e^{uZb} \frac{H(u + b)}{H(u)} \\
\beta &= C_2 e^{-uZa} \frac{H(u + a)}{H(u)} \\
\gamma &= C_3 e^{uZa} \frac{H(u - a)}{H(u)} \\
\delta &= C_4 e^{-uZb} \frac{H(u - b)}{H(u)}
\end{aligned}
\right\} \qquad (u = t + \omega'),
$$

C_1, C_2, C_3, C_4 désignant de nouvelles constantes.

Ces constantes se déterminent en fonction des données initiales en faisant $t = 0$ dans les formules précédentes.

Enfin rappelons que $H(u)$ représente la série

$$
H(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi u}{2\omega} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin \frac{5\pi u}{2\omega} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin \frac{5\pi u}{2\omega} - \ldots,
$$

$$
q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}, \qquad u = t + \omega'.
$$

3. *Calcul des constantes elliptiques.* — Proposons-nous maintenant d'exprimer directement en fonction des données μ, ν, r_0 et des racines de $f(z)$ (qui peuvent être calculées dès que l'on connaît les valeurs de μ, ν, r_0) d'une part, les deux périodes 2ω, $2\omega'$ d'autre part, les arguments elliptiques a et b.

On sait que les trois racines du polynome $f(z)$ considéré en commençant sont toutes les trois réelles et que, si l'on désigne par z_1, z_2, z_3 ces racines rangées par ordre de grandeur décroissante, les nombres

$$
z_1, \quad 1, \quad z_2, \quad z_3, \quad -1
$$

sont aussi rangés par ordre de grandeur. On a fait le changement de variable

$$
z = Ms + N, \qquad s = pu.
$$

et la valeur trouvée pour M $\left(M = \frac{4}{m}\right)$ est positive. Cela posé, on voit de suite que l'on a

$$\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

$$\omega' = \int_{e_3}^{-\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{-\infty} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}.$$

Dans ces formules, les intégrales sont prises suivant des chemins rectilignes; de plus, dans la première, le radical qui est réel est pris avec le signe $+$; dans la seconde, le signe du radical, qui est purement imaginaire, est choisi de façon que $\frac{1}{i}\sqrt{f(z)}$ soit > 0.

Nous allons de même représenter a et b par des intégrales définies, mais, pour pouvoir préciser, nous devons connaître les signes de $\frac{1}{i}\,p'a$ et $\frac{1}{i}\,p'b$. Pour cette discussion, nous nous limitons au cas où l'on a

$$0 < \nu < r_0,$$

de sorte que

$$\frac{1}{i}\,p'a < 0, \qquad \frac{1}{i}\,p'b > 0.$$

Cela posé, puisque pb est réel et $\frac{1}{i}\,p'b$ positif, b est purement imaginaire; on peut prendre b de façon que

$$\frac{\omega'}{i} < \frac{b}{i} < \frac{2\omega'}{i}.$$

En remarquant que, quand z varie de z_3 à -1, u varie de ω' à b, et s de e_3 à pb, on trouve sans peine que l'on a

$$b - \omega' = \int_{e_3}^{pb} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_3}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin rectiligne et les signes des radicaux étant définis par les inégalités

$$\frac{1}{i}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} > 0, \qquad \frac{1}{i}\sqrt{f(z)} > 0.$$

On trouve, en raisonnant d'une façon analogue,

$$a - \omega - \omega' = \int_{e_2}^{pa} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_{z_2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

les intégrales étant encore prises suivant des chemins rectilignes et les signes des radicaux déterminés par les conditions

$$\frac{1}{i}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} < 0, \qquad \frac{1}{i}\sqrt{f(z)} < 0.$$

Remarque. — Les formules précédentes, qui se prêtent facilement aux applications numériques et qui montrent d'une façon simple comment les résultats se relient aux données de la question, se trouvent, à un changement de notation près, dans le Livre déjà cité (*Theorie des Kreisels*, p. 420). MM. Klein et Sommerfeld y parviennent par une autre voie : les intégrales elliptiques qui donnent α, β, γ, δ en fonction de z sont étudiées à l'aide de la surface de Riemann qui correspond à $\sqrt{f(z)}$ et de la représentation conforme de cette surface sur le plan de la variable t; on reconnaît ainsi que α, β, γ, δ sont des fonctions uniformes, doublement périodiques de seconde espèce de la variable t; on détermine leurs périodes, leurs multiplicateurs, leurs zéros et leurs infinis, et l'on peut alors obtenir immédiatement leur expression sous la forme d'un quotient de fonctions H multiplié par une exponentielle à exposant linéaire.

La méthode suivie dans cette Note consiste à introduire de suite les fonctions elliptiques correspondant à

l'intégrale

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

et à décomposer en éléments simples les fonctions à intégrer, après avoir mis les constantes sous la forme convenable; l'intégration est alors immédiate.

Les deux méthodes conduisent aux mêmes formules définitives et aux mêmes calculs numériques.

SUR LE PROBLÈME D'ANALYSE DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1899;

Par M. V. JAMET [1].

---

1. Ce problème consistait dans l'étude des intégrales communes aux deux équations :

$$(p - x)(z - c) - (x - a)(px + qy - 2z) = 0,$$
$$(q - y)(z - c) - (y - b)(px + qy - 2z) = 0,$$

où l'on désigne, comme d'habitude, par z une fonction des deux variables x, y par p, q ses dérivées partielles, et où l'on fait, successivement, les deux hypothèses suivantes : 1° a, b, c désignent trois constantes données; 2° a, b, c sont trois fonctions d'un même paramètre λ, de telle sorte que si λ varie d'une manière continue, le point, qui a pour coordonnées a, b, c, décrit une courbe C.

Ces équations sont évidemment la traduction du problème suivant :

Trouver une surface telle que si, en un quelconque,

---

[1] *Voir* le numéro d'août 1899, p. 379.

A, *de ses points, on lui mène un plan tangent* M, *et qu'on joigne le point* A *au pôle* B *du plan* M *par rapport au paraboloïde, dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2z = 0,$$

la droite AB *passe sans cesse par le point abc ; de sorte que, dans la première hypothèse, elle tourne autour d'un point fixe et que, dans la deuxième, elle rencontre sans cesse une courbe donnée.*

En effet, si le point A a pour coordonnées x, y, z et si p, q désignent les dérivées partielles, par rapport à x et y, de la fonction z définie par l'équation de la surface cherchée, les coordonnées du point B seront

$$p, \quad q, \quad px + qy - z,$$

et la droite qui joindra le point (a, b, c) au point A sera représentée par les équations

$$\frac{X - x}{x - a} = \frac{Y - y}{y - b} = \frac{Z - z}{z - c},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes.

Pour que le point B soit sur cette droite, il faudra qu'on ait constamment

$$\frac{p - x}{x - a} = \frac{q - y}{y - b} = \frac{px + qy - 2z}{z - c},$$

et ces équations sont équivalentes aux équations (1).

Je me propose de généraliser le problème en remplaçant le paraboloïde qui figure dans l'énoncé précédent par une quadrique quelconque.

2. Soit $f(x, y, z, t) = 0$ l'équation de cette quadrique en coordonnées homogènes : nous remplacerons aussi les coordonnées cartésiennes du point a, b, c, par des

coordonnées homogènes a, b, c, d, de sorte que, si les coordonnées cartésiennes du point A sont x, y, z, le plan tangent en ce point à la surface cherchée sera représenté par l'équation

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

où p, q ont la signification habituelle, X, Y, Z désignant les coordonnées courantes ; mais les coordonnées homogènes du point B devant être égales, par exemple, à

$$\mu a + \nu x, \quad \mu b + \nu y, \quad \mu c + \nu z, \quad \mu d + \nu,$$

cette même équation doit être identique à la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \quad [\mu f'_a(a, b, c, d) + \nu f'_x(x, y, z, t)] X \\ + [\mu f'_b(a, b, c, d) + \nu f'_y(x, y, z, t)] Y \\ + [\mu f'_c(a, b, c, d) + \nu f'_z(x, y, z, t)] Z \\ + \mu f'_d(a, b, c, d) + \nu f'_t(x, y, z, t) \end{array}\right\} = 0,$$

où l'on a fait $t = 1$. Nous désignerons désormais les dérivées de $f(x, y, z, t)$ qui figurent dans cette équation par f'_x, f'_y, f'_z, f'_t ; les dérivées de $f(a, b, c, d)$ par f'_a, f'_b, f'_c, f'_d.

En identifiant ces deux dernières équations, nous trouverons

$$\frac{\mu f'_a + \nu f'_x}{p} = \frac{\mu f'_b + \nu f'_y}{q} = \frac{\mu f'_c + \nu f'_z}{-1} = \frac{\mu f'_d + \nu f'_t}{-(px + qy - z)};$$

l'élimination de μ et de ν entre ces trois dernières équations donne les deux équations de condition suivantes :

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f'_a & f'_x & p \\ f'_c & f'_z & -1 \\ f'_d & f'_t & -(px + qy - z) \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} f'_b & f'_y & q \\ f'_c & f'_z & -1 \\ f'_d & f'_t & -(px + qy - z) \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

et nous aurons à chercher les intégrales communes à ces deux équations, dans les deux hypothèses énoncées au début, concernant le point (a, b, c, d).

3. Examinons d'abord le cas où a, b, c, d sont des constantes ; désignons par H la quadrique donnée, par S le point dont les coordonnées homogènes sont a, b, c, d, par P son plan polaire par rapport à H, et considérons une quadrique Σ tangente à H en tous les points communs à H et à P. En un point A pris sur Σ, menons le plan tangent à cette surface, et soit M ce plan. Les deux plans M et P se coupent suivant une droite D ayant même polaire réciproque par rapport aux deux quadriques H et Σ. En effet, la polaire réciproque de D, soit par rapport à H, soit par rapport à Σ, doit passer par le point S et par le pôle C de la droite D, par rapport à la conique de contact des deux surfaces H et Σ. D'ailleurs cette polaire réciproque passe évidemment par le point A et aussi par le pôle du plan M, par rapport à la quadrique H, car le plan M contient la droite D.

4. Donc toute surface Σ est une des surfaces que nous cherchons. L'équation générale de ces surfaces est

$$(3)\qquad (xf'_a + yf'_b + zf'_c + tf'_d)^2 + kf(x, y, z, t) = 0,$$

k désignant un paramètre arbitraire. Mais les équations (2) ont été établies en supposant $t = 1$; faisons donc ici $t = 1$ et proposons-nous de démontrer que toute intégrale commune aux équations (2) est définie par une équation de la forme (3). A cet effet, écrivons les équations (2) sous la forme

$$(4)\qquad \frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b - qf'_c} = \frac{(px + qy - z)f'_z - f'_t}{(px - qy - z)f_c - f'_d},$$

qu'on trouve aisément en transformant les déterminants

qui figurent dans les équations (2). Observons ensuite que chacun des rapports écrits dans ces dernières proportions doit être égal au rapport suivant :

$$\frac{-xf'_x - yf'_y - zf'_z - f'_t}{-xf'_a - yf'_b - zf'_c - f'_d}$$

ou bien

$$\frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d},$$

en vertu d'une propriété des proportions bien connue. Donc les équations (4) et, par conséquent, les équations (2) sont équivalentes à celles-ci :

$$(5) \qquad \frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b + qf'_c} = \frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}$$

qui sont, elles-mêmes, équivalentes à

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)\frac{f'_x + pf'_z}{2\sqrt{f(x, y, z, 1)}} - \sqrt{f(x, y, z, 1)}(f'_a + pf'_c) = 0,$$

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)\frac{f'_y + qf'_z}{2\sqrt{f(x, y, z, 1)}} - \sqrt{f(x, y, z, 1)}(f'_b + qf'_c) = 0.$$

Soit $\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}$ la dérivée de la fonction φ par rapport à x, calculée en regardant z comme une fonction des deux variables x et y; soit $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sa dérivée analogue par rapport à y. En divisant le premier membre de chacune des équations précédentes par $-f(x, y, z, 1)$ et en attribuant aux signes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ le sens que nous venons de préciser, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}\right) = 0.$$

et ces deux conditions ne sont remplies que si le rapport

$$\frac{x f'_a + y f'_b + z f'_c + f'_d}{\sqrt{f(x, y, z, 1)}}$$

est constant. Désignant ce rapport constant par $\sqrt{-k}$, nous trouvons que toute fonction z, assujettie à vérifier les équations (2), est définie par une équation identique à l'équation (3), où l'on a fait $t = 1$.

5. Passons maintenant à la deuxième hypothèse. Supposant que a, b, c, d sont des fonctions données d'un paramètre λ, on éliminera ce paramètre entre les équations (2); on obtiendra de la sorte une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dont l'intégrale générale doit dépendre d'une fonction arbitraire. On aura donc trouvé cette intégrale générale si l'on sait former une fonction z de x et de y vérifiant les équations (2), ou bien les équations équivalentes

$$(5)\qquad \frac{f'_x + p f'_z}{f'_a + p f'_c} = \frac{f'_y + q f'_z}{f'_b + q f'_c} = \frac{2 f(x, y, z, 1)}{x f'_a + y f'_b + z f'_c + f'_d};$$

pourvu que la formation de cette fonction z comporte l'emploi d'une fonction arbitraire. Or, si l'on désigne par k une fonction arbitraire de λ, par k' sa dérivée, par a', b', c', d' les dérivées de a, b, c, d par rapport à λ, les deux équations ci-dessus seront vérifiées quand on regardera z et λ comme deux fonctions de x et de y, définies par les deux équations suivantes

$$(6)\quad \begin{cases} (x f'_a + y f'_b + z f'_c + f'_d)^2 = k^2 f(x, y, z, 1), \\ (x f'_a + y f'_b + z f'_c + f'_d)(x f'_{a'} + y f'_{b'} + z f'_{c'} + f'_{d'}) \\ \qquad = k k' f(x, y, z, 1). \end{cases}$$

En effet, en différentiant la première de ces équations, successivement, par rapport à x et par rapport à y, et, en tenant compte de la deuxième, on trouve

$$2(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)(f'_a + pf'_c) = k^2(f'_x + pf'_z),$$
$$2(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)(f'_b + qf'_c) = k^2(f'_y + qf'_z),$$

et, par conséquent,

$$\frac{f'_x + pf'_z}{f'_a + pf'_c} = \frac{f'_y + qf'_z}{f'_b + qf'_c} = \frac{2(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)}{k^2}.$$

Mais, en vertu de la première équation (c), ce dernier rapport est égal à

$$\frac{2f(x, y, z, 1)}{xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d},$$

de sorte que la fonction z définie par les équations (6) vérifie les équations (5).

6. La deuxième des équations (6) a été obtenue en égalant entre elles les dérivées des deux membres de la première par rapport à λ. La surface intégrale définie par ces deux équations est donc la surface enveloppe des quadriques définies par la première des équations (6), où l'on regarde λ comme un paramètre arbitraire. Chacune de ces quadriques touche la surface enveloppe suivant une courbe définie par les équations (6), et si l'on eût traité l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

par la méthode des caractéristiques, ce sont évidemment de telles courbes que l'on eût trouvées comme caractéristiques. Je dis qu'une telle courbe est une conique. En effet, le système des équations (6) est équivalent au système formé par la première d'entre elles, jointe à la sui-

vante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k'(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d) \\ \quad - k(xf'_{a'} + yf'_{b'} + zf'_{c'} + f'_{d'}) = 0, \end{array} \right.$$

qu'on obtient en divisant membre à membre les équations (6), et en chassant les dénominateurs.

Si λ est constante, cette dernière équation représente un plan. Donc, sur chacune des surfaces intégrales trouvées, les caractéristiques sont des coniques. Chacune d'elles répond à une valeur de λ, ou à une position du point (a, b, c, d) sur la courbe C qu'il décrit; soit S la position qui répond à une valeur donnée de λ, P le plan polaire du point S par rapport à la quadrique donnée. Quand le point S décrit la courbe C, le plan P enveloppe une certaine développable, et, à chaque position du point S sur C, répond une génératrice G de cette développable. D'après l'équation que nous venons de trouver, le plan de la caractéristique passe sans cesse par cette génératrice.

Soient D, E les deux points où la droite G coupe la quadrique donnée, et par suite aussi la conique, intersection de cette quadrique avec le plan P. En un tel point, la quadrique représentée, par la première des équations (6), a le même plan tangent que la quadrique donnée, et chacun de ces deux plans tangents contiendra la tangente à la caractéristique, au point de contact correspondant. Si donc une quadrique T contient la caractéristique définie par les équations (6) et si, en chacun des deux points D, E, son plan tangent contient une droite tangente, au même point, à la quadrique donnée, mais non tangente à la caractéristique, la quadrique donnée et la quadrique T auront, aux deux points D, E, les mêmes plans tangents et, par conséquent, se couperont suivant deux courbes planes. A la fin de ce

Travail, nous aurons l'occasion d'appliquer cette remarque.

7. Pour le moment, supposons qu'on nous donne les fonctions a, b, c, d, ou, ce qui est la même chose, la courbe C, et proposons-nous de déterminer la fonction k de telle sorte que le plan de la caractéristique de la surface intégrale trouvée passe par un point fixe. Soient α, β, γ, δ les coordonnées homogènes de ce point; il suffit évidemment, en vertu de l'équation (7), que l'on ait

$$\begin{aligned} & k'(\alpha f'_a + \beta f'_b + \gamma f'_c + \delta f'_d) \\ & \quad - k(\alpha f'_{a'} + \beta f'_{b'} + \gamma f'_{c'} + \delta f'_{d'}) = 0, \end{aligned}$$

ou bien, d'après une propriété des formes quadratiques,

$$\begin{aligned} & k'(a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta) \\ & \quad - k(a' f'_\alpha + b' f'_\beta + c' f'_\gamma + d' f'_\delta) = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{k}{a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta}\right) = 0;$$

ou enfin, en désignant par m une constante,

$$k = m(a f'_\alpha + b f'_\beta + c f'_\gamma + d f'_\delta).$$

On observera que, pour une même valeur de λ, c'est-à-dire pour une même position du point S sur la courbe C, le plan de la caractéristique est toujours le même quel que soit m. Donc, *sur toutes les surfaces intégrales dont les caractéristiques sont dans des plans passant par un point donné, les caractéristiques répondant à une même position du point* S *sont dans un même plan*. En se reportant à la première des équations (6), on voit que toutes ces caractéristiques sont les intersections de ce plan avec les quadriques circonscrites à la quadrique

donnée, suivant la courbe d'intersection de celle-ci avec le plan polaire du point S. Toutes ces coniques caractéristiques ont deux points communs, savoir les deux points que nous avons appelés D, E (n° 6); en ces deux points, elles ont les mêmes tangentes, savoir les intersections de leur plan avec les plans tangents en D, E à la quadrique donnée.

8. Revenons au cas général. Menons, en tous les points d'une même caractéristique, des plans tangents à la surface intégrale qui la contient; ils sont aussi tangents à une surface du second degré, dont l'équation sera, par exemple, la première des équations (6); et comme la caractéristique est une section plane de cette quadrique, tous ces plans tangents envelopperont un cône circonscrit à la quadrique tout le long de cette caractéristique. Le sommet de ce cône sera, par rapport à la quadrique, le pôle du plan représenté par l'équation (7). Soient ξ, η, ζ, θ les coordonnées homogènes de ce point. Si l'on forme l'équation du plan polaire de ce point et qu'on l'identifie avec l'équation (7), on trouve, pour déterminer ξ, η, ζ, θ, les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{2f'_a(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) - k^2 f'_\xi}{k' f'_a - k f'_{a'}} \\
&= \frac{2f'_b(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) - k^2 f'_\eta}{k' f'_b - k f'_{b'}} \\
&= \frac{2f'_c(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) - k^2 f'_\zeta}{k' f'_c - k f'_{c'}} \\
&= \frac{2f'_d(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) - k^2 f'_\theta}{k' f'_d - k f'_{d'}},
\end{aligned}$$

Ces équations vont nous permettre de rechercher à quelle condition toute caractéristique d'une des surfaces intégrales se compose de deux droites.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que le point ξ, η, ζ, θ, pôle du plan de la caractéristique, se trouve dans ce plan. Cette dernière condition est, en effet, nécessaire et suffisante pour que le plan de la caractéristique soit sans cesse tangent à la surface (6) et, par conséquent, pour que la caractéristique se décompose en deux droites.

Or on reconnaît aisément que chacun des rapports entrant dans les proportions ci-dessus doit être égal à

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2(af'_a + bf'_b + cf'_c + df'_d)(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) \\ \quad - k^2(af'_\xi + bf'_\eta + cf'_\zeta + df'_\theta) \end{array}\right\}}{k'(af'_a + bf'_b + cf'_c + df'_d) - k(af'_{a'} + bf'_{b'} + cf'_{c'} + df'_{d'})},$$

c'est-à-dire à

$$\text{(A)} \qquad \frac{[4f(a, b, c, d) - k^2](\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d)}{2k' f(a, b, c, d) - k(af'_{a'} + bf'_{b'} + cf'_{c'} + df'_{d'})}.$$

D'autre part, ces rapports sont égaux au suivant :

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 2(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) \\ \quad - k^2(a'f'_\xi + b'f'_\eta + c'f'_\zeta + d'f'_\theta) \end{array}\right\}}{k'(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d) - 2kf(a', b', c', d')}.$$

Mais, si le point $(\xi, \eta, \zeta, \theta)$ est dans le plan de la caractéristique, c'est-à-dire si l'on a

$$k'(\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d) = k(\xi f'_{a'} + \eta f'_{b'} + \zeta f'_{c'} + \theta f'_{d'}).$$

Ce dernier rapport sera égal à

$$\text{(B)} \quad \frac{[2(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d) - kk'](\xi f'_a + \eta f'_b + \zeta f'_c + \theta f'_d)}{k'(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d) - 2kf(a', b', c', d')}.$$

En comparant entre eux les deux rapports (A) et (B), on trouve la condition

$$\frac{4f(a, b, c, d) - k^2}{2k'f(a, b, c, d) - k(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)}$$
$$= \frac{2(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d) - kk'}{k'(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d) - 2kf(a', b', c', d')},$$

équivalente à celle-ci

$$\frac{4f(a,b,c,d)-k^2}{kk'-2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)} = \frac{2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk'}{k'^2-4f(a',b',c',d')},$$

ou encore à

$$k'^2+\frac{[2(a'f'_a+b'f'_b+c'f'_c+d'f'_d)-kk']^2}{4f(a,b,c,d)-k^2} = 4f(a',b',c',d').$$

Regardons cette dernière équation comme une équation différentielle où la fonction inconnue est k et où les fonctions a, b, c, d sont données. Nous pourrons l'intégrer en posant

$$(8) \qquad \sqrt{4f(a,b,c,d)-k^2} = 2\cos\varphi\sqrt{f(a,b,c,d)}$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad k = 2\sqrt{f(a,b,c,d)}\sin\varphi.$$

En effet, si l'on fait

$$\sqrt{4f(a,b,c,d)-k^2} = h,$$

le premier membre de l'équation à intégrer sera égal à

$$\left(\frac{dk}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dh}{d\lambda}\right)^2,$$

et se réduira, en vertu des formules (8) et (9), à

$$4f(a,b,c,d)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+4\left[\frac{d\sqrt{f(a,b,c,d)}}{d\lambda}\right]^2.$$

On trouvera donc

$$f(a,b,c,d)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+\left[D_\lambda\sqrt{f(a,b,c,d)}\right]^2 = f(a',b',c',d'),$$

$$\varphi = \int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\frac{f(a',b',c',d')-[D_\lambda f(a,b,c,d)]^2}{f(a,b,c,d)}}\,d\lambda.$$

ou bien

$$\varphi = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{4f(a,b,c,d)f(a',b',c',d') - (a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)^2}}{2f(a,b,c,d)}\, d\lambda,$$

λ_0 étant arbitraire.

On en conclura

$$k = 2\sqrt{f(a,b,c,d)}$$
$$\times \sin \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{4f(a,b,c,d)f(a',b',c',d') - (a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)^2}}{2f(a,b,c,d)}\, d\lambda.$$

9. Parmi les diverses déterminations qu'on peut assigner à la fonction k, notons, en passant, celle qui résulte de l'équation

$$k^2 = 4f(a, b, c, d).$$

L'équation générale des quadriques enveloppées par une des surfaces intégrales cherchées représente alors les surfaces coniques circonscrites à la quadrique donnée, et dont les sommets sont les points de la courbe donnée C. La surface intégrale correspondante sera tangente à la quadrique donnée, suivant une courbe F, intersection de la quadrique donnée avec la surface développable, dont les plans tangents sont les plans polaires des points de la courbe C par rapport à la quadrique donnée. Sur chaque génératrice G de cette développable et sur la courbe F, se trouveront deux points D, E, appartenant à l'une des surfaces coniques qui nous occupent actuellement. Tout cela résulte des développements qui terminent le n° 6, et s'étend aisément aux surfaces trouvées dans le cas général.

10. L'équation des surfaces coniques définies cidessus, savoir

$$(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)^2 - 4f(a, b, c, d)f(x, y, z, 1) = 0,$$

va nous permettre de trouver l'équation du cône ayant pour sommet un point (a, b, c, d) de la courbe C et pour base la courbe définie par les équations (6), c'est-à-dire une caractéristique d'une des surfaces intégrales trouvées, savoir celle qui répond à la position (a, b, c, d) du point S.

Nous rechercherons ensuite s'il y a, sur ce cône, des coniques qu'on puisse considérer, chacune, comme la caractéristique d'une autre surface intégrale, ces diverses surfaces répondant à d'autres déterminations de la fonction k.

Observons d'abord que l'équation générale des surfaces coniques du second degré, tangentes au cône représenté par l'équation ci-dessus, suivant les génératrices passant par les points que nous avons appelés D, E, sera, en désignant par ω un paramètre arbitraire,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)^2 - 4f(a, b, c, d)\,f(x, y, z, 1)\\ &\quad + \omega[(a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d)(xf'_a + yf'_b + zf'_c + f'_d)\\ &\qquad\qquad - 2f(a, b, c, d)(xf'_{a'} + yf'_{b'} + zf'_{c'} + f'_{d'})]^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

En effet, en égalant à zéro le facteur entre crochets écrit sur la deuxième ligne de cette équation, on trouverait l'équation du plan passant par les deux droites SD, SE. Il restera maintenant à choisir ω de telle sorte que, sur cette surface, se trouve la courbe définie par les équations (6). Mais, pour abréger l'écriture, nous poserons

$$f(a, b, c, d) = \text{A};$$

nous observerons que l'expression

$$a'f'_a + b'f'_b + c'f'_c + d'f'_d,$$

identique à

$$af'_{a'} + bf'_{b'} + cf'_{c'} + df'_{d'},$$

est la dérivée de A par rapport à λ, et nous la dési-

gnerons par A'. Nous poserons aussi

$$x f'_a + y f'_b + z f'_c + f'_d = (a f'_x + b f'_y + c f'_z + d f'_t)_{t=1} = \mathrm{P},$$
$$x f'_{a'} + y f'_{b'} + z f'_{c'} + f'_{d'} = (a' f'_x + b' f'_y + c' f'_z + d' f'_t)_{t=1} = \mathrm{P}',$$

et nous observerons que P' est la dérivée de P par rapport à λ.

Alors les équations d'une caractéristique seront

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}^2 - k^2 f(x, y, z, 1) = 0, \\ k'\mathrm{P} - k\mathrm{P}' = 0. \end{cases}$$

L'équation (10) deviendra

$$\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{A} f(x, y, z, 1) + \omega(\mathrm{A}'\mathrm{P} - 2\mathrm{A}\mathrm{P}')^2 = 0,$$

et, pour que la surface représentée par cette dernière équation renferme la courbe représentée par les deux équations qui précèdent, il faut qu'on ait

$$k^2 - 4\mathrm{A} + \omega(\mathrm{A}'k - 2\mathrm{A}k')^2 = 0;$$

cette dernière condition résulte, en effet, de l'élimination de f et de P' entre les trois équations ci-dessus. Voici donc l'équation du cône ayant pour sommet le point (a, b, c, d) et pour base la courbe définie par les équations (11) :

$$\frac{\mathrm{P}^2 - 4 f(x, y, z, 1)}{k^2 - 4\mathrm{A}} = \frac{(\mathrm{A}'\mathrm{P} - 2\mathrm{A}\mathrm{P}')^2}{(\mathrm{A}'k - 2\mathrm{A}k')^2}.$$

11. Considérons une autre surface intégrale, par exemple celle qu'on obtient en remplaçant la fonction k par une autre fonction h de la variable λ. Au point S, (a, b, c, d) considéré précédemment, répond, sur cette surface, une certaine caractéristique, située sur un cône ayant pour équation

$$\frac{\mathrm{P}^2 - 4 f(x, y, z, 1)}{h^2 - 4\mathrm{A}} = \frac{(\mathrm{A}'\mathrm{P} - 2\mathrm{A}\mathrm{P}')^2}{(\mathrm{A}'h - 2\mathrm{A}h')^2}.$$

et pour que ce cône coïncide avec celui dont nous venons d'établir l'équation, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{h^2-4A}{k^2-4A}=\frac{(A'h-2Ah')^2}{(A'k-2Ak')^2}.$$

Ceci exige qu'il y ait, entre h et k, une relation en termes finis que nous allons établir.

A cet effet, posons

$$h=2\sqrt{A}\,h_1,$$
$$k=2\sqrt{A}\,k_1;$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{h_1^2-1}{k_1^2-1}=\frac{h_1'^2}{k_1'^2},$$

d'où l'on conclut

$$(12)\qquad \frac{h_1'}{\sqrt{h_1^2-1}}\pm\frac{k_1'}{\sqrt{k_1^2-1}}=0.$$

puis, en intégrant et désignant par α une constante arbitraire,

$$\log\left(h_1+\sqrt{h_1^2-1}\right)\pm\log\left(k_1+\sqrt{k_1^2-1}\right)=\log\alpha.$$

Si l'on suppose le deuxième logarithme précédé du signe $+$, on trouve

$$h_1+\sqrt{h_1^2-1}=\frac{\alpha}{k_1+\sqrt{k_1^2-1}}$$

ou bien

$$h_1+\sqrt{h_1^2-1}=\alpha\left(k_1-\sqrt{k_1^2-1}\right),$$

équation équivalente à

$$h_1-\sqrt{h_1^2-1}=\frac{1}{\alpha}\left(k_1+\sqrt{k_1^2-1}\right),$$

d'où l'on conclut

$$h_1=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)k_1-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{k_1^2-1}\right]$$

et, en posant

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = m,$$

$$(13)\qquad \begin{cases} h_1 = m k_1 - \sqrt{(1 - m^2)(1 - k_1^2)} \\ \quad = m k_1 - \sqrt{(m^2 - 1)(k_1^2 - 1)}. \end{cases}$$

En supposant le deuxième radical précédé du signe —, nous eussions trouvé

$$h_1 = m k_1 + \sqrt{(1 - m^2)(1 - k_1^2)},$$

et l'on aurait pu réunir ces deux dernières formules en une seule, savoir

$$h_1 = k_1 \cos\beta + \sin\beta \sqrt{1 - k_1^2},$$

β désignant une constante arbitraire. C'est aussi ce qui résulte de la forme suivante :

$$\operatorname{arc}\sin h_1 \pm \operatorname{arc}\sin k_1 = \beta',$$

qu'on peut donner à l'intégrale générale de l'équation (12), en supposant que β' désigne une constante arbitraire.

Mais nous avons tenu à exposer en détail le calcul conduisant à l'équation (13), à cause des conséquences que celle-ci entraîne immédiatement.

12. La surface conique définie au n° **10** et représentée par l'équation

$$\frac{P^2 - 4f(x, y, z, 1)}{k^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'k - 2Ak')^2},$$

a, avec la quadrique donnée, deux points communs où les plans tangents aux deux surfaces sont les mêmes. Ce sont les points désignés antérieurement par D, E. Donc ces deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes, et l'on voit immédiatement que les plans de ces

deux courbes sont représentés par l'équation

$$\frac{P^2}{k^2 - 4A} = \frac{(A'P - 2AP')^2}{(A'k - 2Ak')^2}.$$

Donc l'un deux a pour équation

$$(A'k - 2Ak' - \sqrt{k^2 - 4AA'})P + 2A\sqrt{k^2 - 4A}P' = 0;$$

nous le désignons par U.

L'autre est représenté par l'équation

$$(A'k - 2Ak' + \sqrt{k^2 - 4AA'})P - 2A\sqrt{k^2 - 4A}P' = 0.$$

Nous le désignerons par V.

Considérons aussi les plans des caractéristiques de deux surfaces intégrales répondant aux fonctions k et h étudiées au n° **11**; l'un d'eux est représenté par l'équation

$$k'P - kP' = 0,$$

l'autre par l'équation

$$h'P - hP' = 0.$$

Ces quatre plans passent par une même droite ayan pour équations

$$P = 0, \qquad P' = 0;$$

c'est la droite DE, désignée aussi par G. Cherchons le rapport anharmonique de ces quatre plans. A cet effet, supposons qu'on ait écrit l'équation du plan U sous la forme

$$\mu P + \nu P' = 0.$$

et calculons la différence

$$\frac{\mu}{\nu} - \frac{h'}{h}.$$

Nous trouvons d'abord

$$-\frac{\mu}{\nu} = \frac{A'k - 2Ak' - A'\sqrt{k^2 - 4A}}{2A\sqrt{k^2 - 4A}},$$

et si l'on fait, comme précédemment,

$$k = 2\sqrt{A}\,k_1,$$

on trouve

$$-\frac{\mu}{\nu} = \frac{-k'_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}} + \frac{A'}{2A},$$

puis, à cause de la relation (13),

$$\frac{h'}{h} = \frac{h'_1}{h_1} + \frac{A'}{2A} = \frac{m\sqrt{k_1^2 - 1} - \sqrt{m^2 - 1}\,k_1}{mk_1 - \sqrt{(m^2 - 1)(k_1^2 - 1)}}\,\frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}} + \frac{A'}{2A},$$

puis encore

$$-\frac{\mu}{\nu} - \frac{h'}{h} = -\frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}}\,\frac{(m - \sqrt{m^2 - 1})(k_1 + \sqrt{k_1^2 - 1})}{mk_1 - \sqrt{(m^2 - 1)(k_1^2 - 1)}}.$$

De même, si l'on écrivait l'équation du plan V sous la forme

$$\mu' P + \nu' P' = 0,$$

on trouverait, par un calcul analogue,

$$-\frac{\mu'}{\nu'} - \frac{h'}{h} = \frac{k'_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}}\,\frac{(m + \sqrt{m^2 - 1})(k_1 - \sqrt{k_1^2 - 1})}{mk_1 - \sqrt{(m^2 - 1)(k_1^2 - 1)}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\dfrac{\mu}{\nu} - \dfrac{h'}{h}}{\dfrac{\mu'}{\nu'} - \dfrac{h'}{h}} = -\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}}\,\frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 1}}{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 1}}.$$

On trouvera le rapport anharmonique cherché en divisant le second membre de cette dernière égalité par l'expression de

$$\frac{\dfrac{\mu}{\nu} - \dfrac{k'}{k}}{\dfrac{\mu'}{\nu'} - \dfrac{k'}{k}}$$

en fonction de λ. Or cette expression ne peut différer de

$$\frac{\frac{\mu}{\nu} - \frac{h'}{h}}{\frac{\mu'}{\nu'} - \frac{h'}{h}}$$

que par le changement de m en $+ 1$. Car, pour $m = 1$, on trouve

$$h_1 = k_1.$$

Donc l'expression que nous cherchons actuellement est

$$\frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 1}}{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 1}},$$

et le rapport anharmonique des quatre plans considérés est

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Ceci nous montre que, d'une des surfaces intégrales trouvées, on peut en déduire une infinité d'autres comme il suit. Soit A un point situé sur une première surface intégrale, B le pôle de son plan tangent en A par rapport à la quadrique donnée. La droite AB passe, comme on sait, par un point S situé sur la courbe C; c'est donc une génératrice du cône ayant pour sommet S et pour base la caractéristique tracée par le point A sur la surface considérée. Cette droite coupe la quadrique donnée en deux points M, N, situés respectivement sur les deux coniques communes à ce cône et à la quadrique donnée. Soit m un nombre donné et P un point situé sur la droite MN, de telle sorte que le rapport anharmonique

$$(\text{MNAP})$$

soit égal à

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Quand le point A décrira une caractéristique de la surface intégrale considérée en premier lieu, le point P décrira une caractéristique d'une deuxième surface intégrale; soient H la première surface, H′ la seconde. Quand la caractéristique sur laquelle se trouve le point A décrira la surface H, la caractéristique lieu du point P décrira la deuxième surface intégrale H′.

Il est, d'ailleurs, bien évident qu'au lieu de se donner le nombre m, on peut se donner arbitrairement le rapport anharmonique constant

$$(\mathrm{MNAP})$$

égal, par exemple à γ, et déterminer m par la condition

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{m + \sqrt{m^2 - 1}} = \gamma;$$

le nombre γ, ainsi choisi, déterminera la surface intégrale H′.

13. D'après la manière dont nous avons établi les équations (2), ou (5), il est évident qu'à toute surface H répondant à la question, répond une surface H″, polaire réciproque de H par rapport à la quadrique donnée. Mais, ici, les deux points A, P se correspondent de telle sorte que le rapport anharmonique

$$(\mathrm{MNAP}) \quad \text{ou} \quad \gamma$$

est égal à -1; ceci exige qu'on ait

$$m = 0.$$

Alors l'équation (13) devient

$$h_1 = \sqrt{1 - k_1^2},$$

et celle-ci équivaut à

$$h^2 + k^2 = 4A.$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

I. *Les axes coordonnés étant rectangulaires sur la circonférence*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

on considère le point A, *d'abscisse* a, *et un point variable* M, *que l'on joint au point* P, *de coordonnées* 0, 0, AM. *Calculer le volume compris entre* OXY *et la surface engendrée par la droite* MP *quant le point* M *parcourt la circonférence; moment d'inertie de ce volume, supposé homogène, autour de* OZ. *Trajectoires orthogonales des génératrices* MP.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires, dont* OZ *est dirigé dans le sens de la pesanteur, on considère la courbe* C,

$$y = 0, \qquad z(a^2 + x^2) = a^3,$$

qui coupe OZ *en* A. *Un tube très étroit, dont l'axe coïncide avec un arc* B′AB *de* C, *peut tourner autour de* OZ; *il renferme une petite masse* m *qui peut y glisser sans frottement. A l'instant initial, le tube tourne autour de* OZ *avec une vitesse* ω, *le point* Xm *est en* A *avec une vitesse* V, *et le système est abandonné à lui-même. Déterminer* ω *et le moment d'inertie* I *du tube*

autour de OZ de sorte que la vitesse de glissement de m dans le tube reste constante.

I. $$V = \tfrac{4}{3} a^3, \qquad I = \tfrac{2}{3} a^2;$$

projection d'une trajectoire sur OXY :

$$(a - r)^2 (1 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta) = C^2.$$

II. r et θ étant les coordonnées polaires de la projection de m sur OXY, si l'on élimine $\frac{d\theta}{dt}$ entre les équations des aires et des forces vives, V disparait et l'on a

$$\frac{I^2 \omega^2}{I + mr^2} - I\omega^2 + \frac{2mgar^2}{a^2 + r^2} = 0;$$

pour que cette équation soit vérifiée quel que soit r, il faut

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}, \qquad I = ma^2.$$

Épreuve pratique. — *En un point de l'équateur, on trouve h et h' pour les hauteurs d'une même étoile à deux époques séparées par un intervalle de six heures sidérales : calculer la déclinaison de l'étoile.*

$$\sin^2 D = \cos(h + h')\cos(h - h').$$

Calcul différentiel et intégral.

I. *Définir les systèmes différentiels orthonomes et montrer que la définition est satisfaite par le système*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1 + u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1 - 2u)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + u^2 + v,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Vérifier que la condition de passivité relative à la dérivée cardinale $\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z}$ est identiquement satisfaite : puis, supposant la même vérification faite pour les deux autres conditions de passivité, chercher l'économie des conditions initiales dont la donnée suffit à déterminer une solution ordinaire du système proposé.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *déterminer une surface dont les sections parallèles à* ZOX *soient des lignes de courbure et qui se raccordent avec la surface*

$$x^3 + 2x^2 - y^2 + z^2 - x - 1 = 0,$$

tout le long de sa trace sur le plan YOZ.

II. Une première intégration donne

$$q = \sqrt{1 + p^2}\,\varphi(y) :$$

le long de la courbe proposée, $p = \frac{1}{2\sqrt{1+y^2}}$, $q = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, donc

$$\varphi(y) = \frac{2y}{\sqrt{4y^2+5}}.$$

On a à intégrer une équation du premier ordre dont l'intégrale est

$$z = C + \tfrac{1}{2}\sqrt{4y^2 + 5 - (1-2x)^2} ;$$

on trouve que C est nul et que la surface cherchée est un hyperboloïde de révolution.

Épreuve pratique. — *Trouver l'intégrale générale du système*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

en prenant pour variables indépendantes

$$x' = a_1 x + b_1 y, \qquad y' = a_2 x + b_2 y$$

et choisissant a_1, b_1, a_2, b_2 *de sorte que la première des équations transformées ne renferme que* $\frac{\partial z}{\partial x'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}$, *et la seconde que* $\frac{\partial z}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y' \partial x'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}$.

On peut prendre $a_1 = b_1 = a_2 = 1$, b_2 égal à une racine cubique imaginaire de l'unité, et l'on trouve

$$z = A e^{x+y} + \left(B \cos \frac{x-y}{2}\sqrt{3} + C \sin \frac{x-y}{2}\sqrt{3}\right) e^{-\frac{x+y}{2}} + D.$$

Mécanique.

I. *Sur un cône dont les génératrices font un angle de 30° avec l'axe OZ, trouver une courbe C telle qu'un point de masse m, assujetti à rester sur C et attiré vers OZ par une force égale au produit de m par une constante* λ^2 *et par la distance de m à OZ, arrive en un point déterminé de C au bout du temps* $\frac{\pi}{\lambda}$, *quel que soit le point d'où il part sans vitesse initiale. Montrer que C est une géodésique du cône.*

II. *Une couche sphérique homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner autour d'un de ses points O, qui est fixe; à l'instant initial, elle tourne avec une vitesse* ω, *autour d'un axe instantané OI qui fait un angle de 45° avec le diamètre OM. Mouvement ultérieur, pression sur le point O, calcul du temps au bout duquel OM sera perpendiculaire à sa direction initiale.*

I. On doit avoir sur C :

$$-\lambda^2 u \frac{du}{dS} = -\frac{\pi^2}{4T^2} S = -\frac{\lambda^2 S}{4};$$

on en tire $n = \frac{a}{\cos\frac{1}{2}\psi}$, et la relation $\frac{ud\psi}{dS} = \frac{a}{u}$ caractérise une géodésique sur une surface de révolution.

II. L'axe OS du couple des quantités de mouvement, qui est fixe dans l'espace, est situé dans le plan IOM_0, faisant avec OM l'angle θ dont la tangente est $\frac{5}{2}$; les cônes de Poinsot sont de révolution : $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega\sqrt{29}}{5\sqrt{2}}$.

Le centre de gravité décrit uniformément un cercle, d'où l'on conclut la charge du point O, égale à

$$M a \psi'^2 \sin\theta = \frac{M a \omega^2 \sqrt{29}}{10}.$$

Enfin le temps au bout duquel OM sera perpendiculaire à sa direction initiale est donné par l'équation

$$\cos\frac{\omega t\sqrt{29}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{25}.$$

Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA, *de* 1^m *de long, tourne uniformément autour de* O *en faisant trois tours par seconde ; elle est articulée à une bielle* AB, *longue de* 2^m, *dont l'extrémité* B *glisse sur une droite* OX. *Calculer la vitesse de* B *quand* AOB *est égal à* 60°.

Le mouvement de la bielle peut s'obtenir en la liant à une courbe qui roulerait sans glisser sur une courbe fixe : déterminer ces deux courbes.

$$V = -\frac{3\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{13})}{\sqrt{13}};$$

courbe fixe :

$$y^2 = \frac{x^2(x^2 - 1)(9 - x^2)}{(x^2 - 3)^2};$$

roulante :

$$r = 1 + \frac{3}{1 - 2\cos\theta}.$$

QUESTIONS.

1831. On donne un cercle O et un point A dans l'espace; soit M un point du cercle, démontrer que le plan mené par M perpendiculairement à AM passe par un point fixe A′ quand M décrit le cercle.

Trouver le lieu que décrit A′, lorque A décrit un plan P. Ce lieu est une quadrique; mettre en évidence les plans de section circulaire et reconnaître la nature de la surface.

Trouver le lieu que décrit A′, lorsque A décrit une sphère. Ce lieu est, en général, une surface du quatrième degré. Montrer que toute sphère passant par le cercle O coupe cette surface, à distance finie, suivant un second cercle.

(Ch. Bioche.)

1832. I. Si l'on considére les triangles T inscrits à une conique A et circonscrits à une conique B, le lieu des centres des cercles Σ qui leur sont circonscrits est une conique C.

II. Il existe un point du plan ayant même puissance par rapport à tous les cercles Σ ; ce point se détermine comme il suit : deux des triangles T ont un sommet à l'infini; les deux côtés opposés respectivement à ces sommets se coupent au point cherché P.

III. D'après cela, l'enveloppe des cercles Σ est une anallagmatique du quatrième ordre ayant le point P pour pôle et la conique C pour déférente; pour que cette courbe se décompose en deux cercles, il faut et il suffit que les deux foyers de la conique B soient situés sur la conique A.

IV. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que tous les cercles Σ passent par le point P.

(G. Humbert.)

LISTE DES QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES »

RESTÉES SANS SOLUTION AU 31 DÉCEMBRE 1899 [1].

62	589	812	1000	1355	1444	1548	1650	1710	1784
126	592	815	1004	1359	1445	1549	1652	1715	1785
193	593	820	1007	1361	1446	1551	1655	1721	1790
261	596	821	1008	1363	1447	1552	1656	1730	1795
266	597	829	1013	1364	1448	1564	1657	1731	1796
333	598	846	1015	1365	1471	1571	1660	1733	1799
360	604	848	1035	1366	1479	1576	1661	1738	1805
383	606	851	1042	1371	1483	1579	1662	1742	1809
400	607	852	1058	1376	1485	1580	1664	1745	1810
424	617	859	1063	1390	1486	1582	1672	1747	1811
434	643	861	1074	1392	1490	1585	1676	1751	1813
439	666	880	1078	1393	1491	1588	1677	1752	1814
448	693	882	1092	1394	1502	1596	1678	1754	1816
480	703	884	1105	1402	1503	1599	1680	1755	1820
495	718	885	1107	1403	1505	1600	1686	1756	1821
496	724	888	1108	1416	1508	1609	1687	1761	1824
512	729	891	1149	1430	1510	1614	1688	1762	1825
513	730	892	1206	1432	1511	1617	1689	1763	1826
516	731	893	1234	1433	1519	1628	1690	1765	1827
528	732	909	1236	1435	1522	1629	1691	1770	1828
546	772	937	1246	1438	1523	1630	1692	1775	1829
549	774	938	1256	1439	1527	1631	1693	1776	1830
554	791	947	1305	1440	1528	1632	1694	1777	1831
573	798	967	1307	1441	1530	1633	1695	1779	1832
583	804	989	1310	1442	1531	1634	1704	1782	
585	805	999	1321	1443	1532	1647	1705	1783	

[1] Les lecteurs sont invités à signaler les erreurs qui pourraient exister encore dans ce relevé, malgré l'attention avec laquelle on l'a établi, et les rectifications dont il a été l'objet. La Rédaction les remercie à l'avance des communications qu'ils voudront bien lui faire à ce sujet.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XVIII, 3e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

A. — Algèbre élémentaire ; théorie des équations algébriques et transcendantes ; groupes de Galois ; fractions rationnelles ; interpolation.

B. — Déterminants ; substitutions linéaires ; élimination ; théorie algébrique des formes ; invariants et covariants ; quaternions ; équipollences et quantités complexes.

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral ; applications analytiques ; quadratures ; intégrales multiples ; déterminants fonctionnels ; formes différentielles ; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires ; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique ; nombres de Bernoulli ; fonctions sphériques et analogues.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles ; équations fonctionnelles ; équations aux différences finies ; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres ; analyse indéterminée ; théorie arithmétique des formes et des fractions continues ; division du cercle ; nombres complexes, idéaux, transcendants.

J. — Analyse combinatoire ; Calcul des probabilités ; Calcul des variations; Théorie générale des groupes de transformations [en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P)]; théorie des ensembles de M. Cantor.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères) ; Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; Géométrie descriptive ; perspective.

L². — Quadriques.

M^1. — Courbes planes algébriques.

M^2. — Surfaces algébriques.

M^4. — Courbes et surfaces transcendantes.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

Q. — Géométrie, Divers; Géométrie à *n* dimensions; Géométrie non euclidienne. Analysis situs; Géométrie de situation.

R. — Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; Mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME XVIII, 3e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

26403 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

